MASTER
NEGATIVE
NO. 91-80299-2

MICROFILMED 1991

COLUMBIA UNIVERSITY LIBRARIES/NEW YORK

as part of the
"Foundations of Western Civilization Preservation Project"

Funded by the
NATIONAL ENDOWMENT FOR THE HUMANITIES

Reproductions may not be made without permission from
Columbia University Library

COPYRIGHT STATEMENT

The copyright law of the United States -- Title 17, United States Code -- concerns the making of photocopies or other reproductions of copyrighted material...

Columbia University Library reserves the right to refuse to accept a copy order if, in its judgement, fulfillment of the order would involve violation of the copyright law.

AUTHOR:

LEWIN, MARCUS

TITLE:

UEBER DIE PRINZIPIEN VON HAMILTON UND...

PLACE:

LEIPZIG

DATE:

1898

Master Negative #

91-80299-2

COLUMBIA UNIVERSITY LIBRARIES
PRESERVATION DEPARTMENT

BIBLIOGRAPHIC MICROFORM TARGET

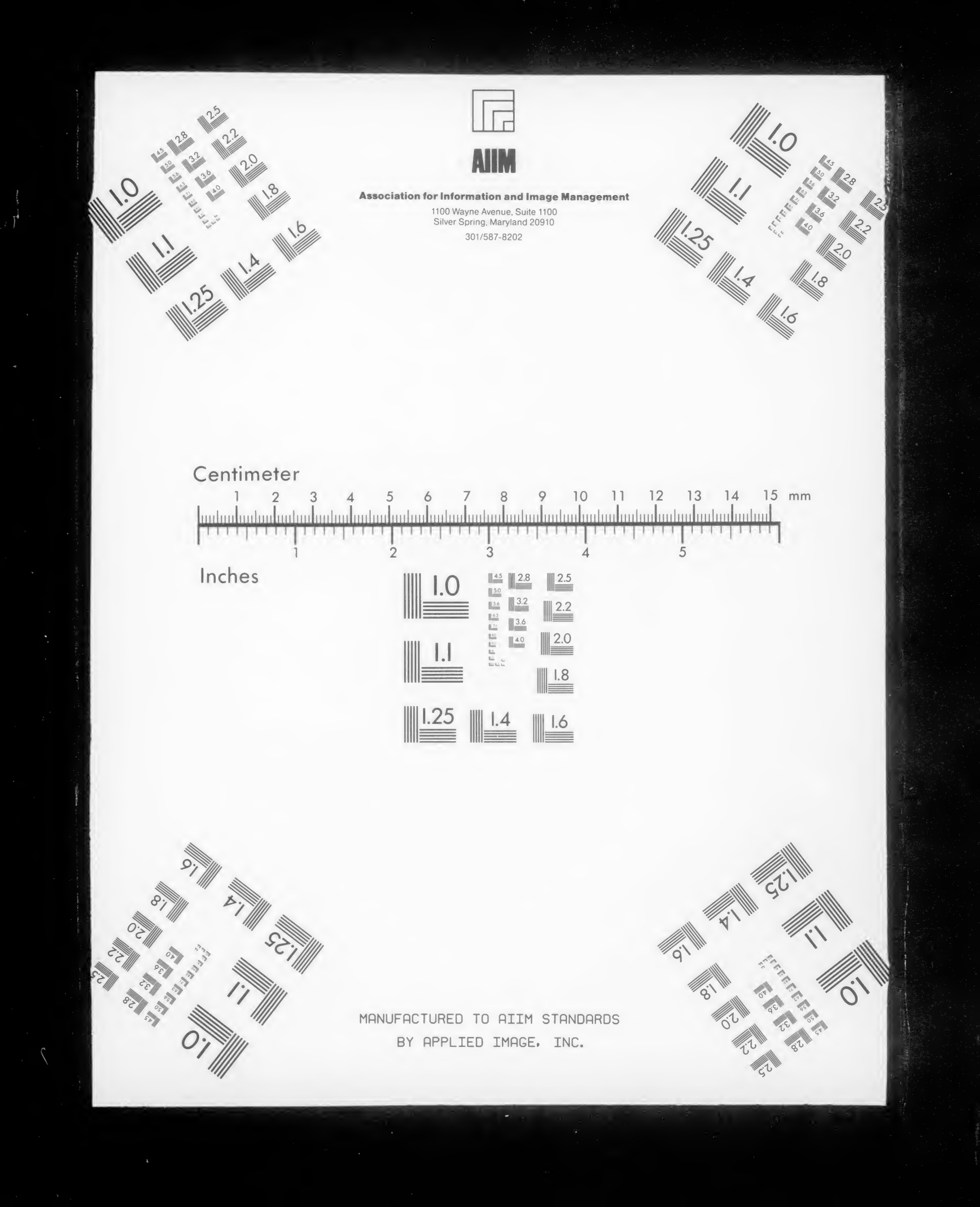
Original Material as Filmed - Existing Bibliographic Record

192 H18 DL
Lewin, Marcus. 1873-
Über die prinzipien von Hamilton und Maupertuis.
Leipzig 1898. O. 49 p.
Doctor's dissertation at Heidelberg university.
18975b

Restrictions on Use:

TECHNICAL MICROFORM DATA

FILM SIZE: 35 mm REDUCTION RATIO: 1/
IMAGE PLACEMENT: IA (IIA) IB IIB
DATE FILMED: 10-24-91 INITIALS M.B.
FILMED BY: RESEARCH PUBLICATIONS, INC WOODBRIDGE, CT


AIIM
Association for Information and Image Management
1100 Wayne Avenue, Suite 1100
Silver Spring, Maryland 20910
301/587-8202
Centimeter
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 mm
1 2 3 4 5
Inches
MANUFACTURED TO AIIM STANDARDS
BY APPLIED IMAGE, INC.

132 H18
DL

192H18 DL

Columbia University
in the City of New York

Library

ÜBER DIE PRINZIPIEN

VON

HAMILTON UND MAUPERTUIS.

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE

AN DER

NATURWISSENSCHAFTLICH-MATHEMATISCHEN FAKULTÄT

DER

UNIVERSITAT HEIDELBERG

VON

MARCUS LEWIN

AUS WILNA (RUSSLAND).

DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG.

1898.

SEINEM HOCHVEREHRTEN LEHRER

HERRN

GEHEIMRAT PROF. DR. LEO KOENIGSBERGER

IN HEIDELBERG

ALS KLEINER AUSDRUCK SEINER GROSSEN DANKBARKEIT

GEWIDMET

VOM VERFASSER.

292917

§ 1.

Die Variation der Zeit.

Man war eine Zeit lang der Ansicht, dafs bei den Variationsprinzipien der Mechanik die Zeit als unabhängige Variable, als welche man sie ja in allen Problemen der Mechanik zu betrachten gewöhnt ist, dem üblichen Verfahren der Variationsrechnung gemäfs, von der Variation ausgeschlossen werden müsse. Diese Auffassung beeinträchtigte wesentlich die klare Einsicht in die wirkliche Bedeutung dieser Prinzipien und verdunkelte namentlich das Verhältnis der beiden Prinzipien: des von Hamilton und des von Maupertuis zu einander, wenigstens dann, wenn man das letztere nicht in der Jacobischen, von der Zeit völlig freien Form, sondern in dem ihm von Lagrange gegebenen Ausdrucke zu Grunde legte. Der Übergang von der erwähnten Ansicht zu einer andern, richtigeren ist durch zwei Abhandlungen von Adolph Mayer charakterisiert. Die erste[1]) von ihnen erschien im Jahre 1877 und vertrat noch den alten Standpunkt, welcher Mayer zur Folgerung zwang, dafs Lagrange bei seiner Auseinandersetzung des Prinzips der kleinsten Aktion eigentlich nicht dasjenige im Auge hatte, welches wir jetzt unter diesem Namen verstehen, sondern das in den Jahren 1834—35 von Hamilton erkannte und nach ihm benannte Hamiltonsche Prinzip. In der zweiten Arbeit[2]) kommt Mayer von dieser Ansicht wieder ab, denn, indem er da zum erstenmale auch die Zeit der Variation unterwirft, findet er in Lagranges Ableitung in der That das echte Prinzip der kleinsten Aktion. Mayers erste Ansicht erscheint völlig berechtigt, wenn man sich vergegenwärtigt, dafs die Sonderung der beiden Prinzipien wesentlich darauf beruht, dafs man zum Aktionsprinzip gelangt, wenn man die Variation der Zeit zuläfst, zum Hamiltonschen hingegen bei der

---

1) Adolph Mayer, Geschichte des Prinzips der kleinsten Aktion. (Akademische Antrittsrede) p. 29.

2) Adolph Mayer, „Die beiden allgemeinen Sätze der Variationsrechnung etc.“ Sitzungsberichte der sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften (math.-phys. Klasse) 1886, p. 341.

speziellen Variationsart, bei welcher die Zeit von der Variation ausgeschlossen bleibt.

In der zuletzt erwähnten Arbeit hebt Mayer hervor, dafs schon andere Forscher vor ihm der Variation der Zeit das Wort gesprochen hatten, so z. B. im Jahre 1850 Ostrogradsky[1]). Dieser behandelt das Aktionsprinzip als Spezialfall eines allgemeinen isoperimetrischen Problems, bei welchem er auch die unabhängige Variable — also im Spezialfalle die Zeit — variiert, und bei welchem, nebenbei bemerkt, die zu integrierende Function nicht nur die Koordinaten und ihre ersten Ableitungen, sondern auch Ableitungen beliebig hoher Ordnung enthält, also gerade das ist, was Königsberger später als kinetisches Potential mechanischer Probleme eingeführt hat und womit wir uns im folgenden zu beschäftigen haben werden. Seitdem sich die neue Auffassung Bahn gebrochen hat, ist eine Reihe von Arbeiten über das Prinzip der kleinsten Aktion erschienen, von denen die von Mayer[2]) zuerst, wie bereits erwähnt, feststellte, dafs Lagrange doch das Prinzip der kleinsten Aktion behandelt, wiewohl er es in eine von der Jacobischen Form verschiedene gekleidet hatte, so dafs das Prinzip nunmehr zwei verschiedene Ausdrücke besafs.

Was nun die Bedeutung der Variation der Zeit und somit ihre Berechtigung oder Notwendigkeit betrifft, so leuchten sie unmittelbar ein, wenn man sich die diesbezügliche Auseinandersetzung von Hölder[3]) vergegenwärtigt. Denkt man sich nämlich die Punkte der wirklichen Bahn und die variierten einander in irgend einer Weise zugeordnet, so sieht man, dafs es einer wesentlichen Einschränkung des Problems gleichkäme, wollte man von vorne herein festsetzen, dafs zugeordnete Punkte stets zur selben Zeit passiert werden sollen. Bleibt man aber beim allgemeinen Falle, d. h. läfst man verschiedene Durchgangszeiten für entsprechende Punkte zu, so ist dadurch die Variation der Zeit von selbst eingeführt.

Genau dieselbe Überlegung gilt für die Variation der Energie des Systems, und wir werden daher, insofern wir das Problem ganz allgemein fassen wollen, die Koordinaten samt ihren Ableitungen, die Energie und die Zeit zu variieren haben. Als Spezialfälle werden wir natürlich solche betrachten können, bei welchen entweder 1) ein-

1) Ostragradsky, „Équations différentielles dans le problème des isopérimètres". Mémoires de l'académie des sciences de St. Pétersbourg. (Sc. math. et phys.) Tome IV. 1850.

2) Vergl. Anmerk. 2 der vorigen Seite.

3) Hölder, „Die Prinzipien von Hamilton und Maupertuis". Nachrichten der kgl. Ges. der Wissensch. zu Göttingen (math.-phys. Kl.). 1896, p. 126—129.

ander zugeordnete Punkte zur selben Zeit passiert werden, d. h. $\delta t = 0$, oder 2) das System in solchen Punkten dieselbe Energie besitzt, d. h. $\delta E = 0$, oder endlich 3) diese beiden Bedingungen zutreffen.

Über die praktische Ausführung der Variation sei hier noch bemerkt, dafs wir eine Hilfsvariable einführen, d. h. eine Veränderliche, von welcher wir uns alle Bestimmungsstücke des Problems, also die Koordinaten, ihre Ableitungen, die Energie und die Zeit abhängig denken. Wir haben dann, den Regeln der Variationsrechnung gemäfs, alle abhängigen Veränderlichen zu variieren. Wir wollen die Hülfsvariable mit u, die nach ihr genommenen Ableitungen mit

$$\dot{p}_s,\ \ddot{p}_s, \cdots, \overset{x}{p}_s, \cdots,\ \dot{t},\ \ddot{t}, \cdots, \overset{x}{t}, \cdots$$

bezeichnen, wogegen die Ableitungen nach der Zeit in der üblichen Weise

$$p_s', p_s'', \cdots, p_s^{(x)}, \cdots$$

geschrieben werden sollen.

§ 2.

Definition des Problems.

Die zuletzt erwähnte Arbeit von A. Mayer hatte das Prinzip der kleinsten Aktion klargestellt, aber nur unter Voraussetzung des Prinzips der lebendigen Kraft, wie denn bis dahin allgemein angenommen wurde, dafs die Geltung des Prinzips der lebendigen Kraft eine notwendige Voraussetzung des Aktionsprinzips sei. Diese Ansicht wurde noch im Jahre 1886, also gleichzeitig mit der Arbeit von Mayer, von Helmholtz in seiner Abhandlung „über die physikalische Bedeutung des Prinzips der kleinsten Aktion"[1]) vertreten. Aber schon im nächstfolgenden Jahre zeigte Helmholtz[2]), dafs man zur Lagrangeschen Form des Prinzips auch dann noch gelangen kann, wenn das kinetische Potential der Kräfte auch die Zeit explicite enthält, in welchem Falle bekanntlich das Prinzip der lebendigen Kraft nicht mehr gilt. Réthy[3]) hielt aber diese Arbeit für nicht ganz streng und sah sich daher veranlafst, die Gültigkeit des Aktionsprinzips ohne Zuhülfenahme der lebendigen Kraft nochmals zu beweisen. Dieses ist gleichzeitig teilweise von Hölder in der citierten Arbeit ausgeführt werden.

1) Helmholtz, Wissenschaftl. Abhandlungen. Bd. III p. 203—248.

2) Ibid. p. 249—263. „Zur Geschichte des Prinzips der kleinsten Aktion".

3) Réthy, „Über das Prinzip der kleinsten Aktion und das Hamiltonsche Prinzip". Mathemat. Annalen. Bd. 48 p. 515.

Nun hat Königsberger[1]) gezeigt, dafs, wenn man sich eine Bewegung denkt, bei welcher an die Stelle des kinetischen Potentials $T+U$ eine Funktion — wir wollen sie im folgenden mit H bezeichnen und das kinetische Potential kurzweg nennen — tritt, welche nicht nur die Koordinaten und ihre ersten Ableitungen, sondern auch höhere Ableitungen der Koordinaten enthält, und wenn man ein mechanisches Prinzip, etwa das D'Alembertsche, in entsprechend veränderter Form als geltend voraussetzt, sämtliche Prinzipien der Mechanik sich für diese Bewegung als rein mathematische Konsequenzen des zu Grunde gelegten Prinzips ergeben. Das Aktionsprinzip ist dort jedoch nur mit Voraussetzung der lebendigen Kraft und auch da nur für den Fall durchgeführt, dafs H blofs die ersten und zweiten Ableitungen enthält, während für den Fall, dafs auch höhere Ableitungen darin vorkommen, der Ausdruck des Prinzips ohne Beweis angegeben ist[2]).

Wir stellen uns daher folgende Aufgabe: Es sei H eine Funktion der Zeit t, der Energie E, der von einander unabhängigen — indem wir uns die Bewegungsgleichungen zur Elimination einer Anzahl von Koordinaten verwendet denken — Koordinaten $p_1, p_2, \cdots p_n$ und ihrer Ableitungen nach der Zeit bis zur ν^{ten} Ordnung: $p_s', p_s'', \cdots p_s^{(\nu)}$ für $s = 1, 2, \cdots, n$. Es sollen — H als das kinetische Potential einer Bewegung aufgefasst — die Variationsprinzipien der Mechanik für diese Bewegung aufgestellt werden.

Ich habe schon im § 1 hervorgehoben, dafs Ostrogradsky ebenfalls eine solche Function höherer Ableitungen behandelt hat, aber gleichfalls auf Grund des Prinzips der lebendigen Kraft. Wir werden diesen Fall viel einfacher erledigen können.

§ 3.

Vorbereitende Formeln.

Wie bereits erwähnt, denken wir uns alle in H vorkommenden Gröfsen als Functionen einer Hülfsvariablen und bezeichnen die Ableitungen nach dieser Grösse mit $\overset{\varkappa}{t}$, $\overset{\varkappa}{p}_s$, dagegen die Ableitungen der Koordinaten nach der Zeit mit $p_s^{(\varkappa)}$. Wir werden im folgenden von einem Systeme zum andern überzugehen haben und müssen daher einen Zusammenhang zwischen den $p_s^{(\varkappa)}$ und $\overset{\lambda}{p}_s$ ermitteln. In diesem

1) Königsberger, Ueber die Prinzipien der Mechanik. Sitzungsberichte der Akad. d. Wiss. zu Berlin. 1896.

2) l. c. p. 411 Formel (62).

Kapitel werden wir eine Reihe von Formeln durch Rechnung ableiten, auf deren allgemeine Gültigkeit wir dann im nächsten eingehen werden.

Es ist:

$$\dot{p}_s = \frac{dp_s}{du} = \frac{dp_s}{dt}\frac{dt}{du} = \dot{t}p_s'$$

$$\ddot{p}_s = \frac{d\dot{p}_s}{du} = \ddot{t}p_s' + \dot{t}\frac{dp_s'}{du} = \ddot{t}p_s' + \dot{t}^2 p_s''$$

$$\dddot{p}_s = \frac{d\ddot{p}_s}{du} = \dot{t}^3 p_s''' + 3\dot{t}\ddot{t}p_s'' + \dddot{t}p_s'$$

$$\overset{4}{p}_s = \dot{t}^4 p_s^{(4)} + 6\dot{t}^2\ddot{t}p_s''' + \left[4\dot{t}\dddot{t} + 3\ddot{t}^2\right]p_s'' + \overset{4}{t}p_s'$$

$$\overset{5}{p}_s = \dot{t}^5 p_s^{(5)} + 10\dot{t}^3\ddot{t}p_s^{(4)} + \left[10\dot{t}^2\dddot{t} + 15\dot{t}\ddot{t}^2\right]p_s''' + \left[5\dot{t}\overset{4}{t} + 10\ddot{t}\dddot{t}\right]p_s'' + \overset{5}{t}p_s'$$

u. s. w. Diese lassen sich alle in die allgemeine Formel zusammenfassen:

$$(1) \qquad \overset{\varkappa}{p}_s = \sum_1^{\varkappa}{}^{\mu}\frac{p_s^{(\mu)}}{\mu!}\sum_{\Sigma\psi=\varkappa}^{\psi\geq 1}\frac{\varkappa!}{\psi_1!\,\psi_2!\cdots\psi_\mu!}\overset{\psi_1}{t}\overset{\psi_2}{t}\cdots\overset{\psi_\mu}{t}.$$

Diese Formel werden wir auch in folgender Gestalt gebrauchen:

$$(1^a) \qquad \delta\overset{\varkappa}{p}_s = \sum_1^{\varkappa}{}^{\mu}\frac{\delta p_s^{(\mu)}}{\mu!}\sum_{\Sigma\psi=\varkappa}^{\psi\geq 1}\frac{\varkappa!}{\psi_1!\,\psi_2!\cdots\psi_\mu!}\overset{\psi_1}{t}\overset{\psi_2}{t}\cdots\overset{\psi_\mu}{t}.$$

Zu den weiteren erforderlichen Formeln gelangen wir folgendermafsen. Es ist:

$$(2)\begin{cases} p_s' = \dfrac{dp_s}{dt} = \dfrac{dp_s}{du} : \dfrac{du}{dt} = \dot{p}_s \cdot \dfrac{1}{\dot{t}} \\ p_s'' = \dfrac{dp_s'}{dt} = \dfrac{1}{\dot{t}}\dfrac{dp_s'}{du} = \dfrac{\dot{t}\ddot{p}_s - \dot{p}_s\ddot{t}}{\dot{t}^3}; \quad p_s''' = \dfrac{\dddot{p}_s}{\dot{t}^3} - \dfrac{\dot{p}_s\dddot{t}}{\dot{t}^4} - 3\dfrac{\ddot{p}_s\ddot{t}}{\dot{t}^4} + 3\dfrac{\dot{p}_s\ddot{t}^2}{\dot{t}^5} \\ p_s^{(4)} = \dfrac{\overset{4}{p}_s}{\dot{t}^4} - \dfrac{\dot{p}_s\overset{4}{t}}{\dot{t}^5} - 4\dfrac{\ddot{p}_s\dddot{t}}{\dot{t}^5} - 6\dfrac{\ddot{p}_s\ddot{t}}{\dot{t}^5} + 10\dfrac{\dot{p}_s\ddot{t}\dddot{t}}{\dot{t}^6} + 15\dfrac{\ddot{p}_s\ddot{t}^2}{\dot{t}^6} - 15\dfrac{\dot{p}_s\ddot{t}^3}{\dot{t}^7} \\ p_s^{(5)} = \dfrac{\overset{5}{p}_s}{\dot{t}^5} - 10\dfrac{\overset{4}{p}_s\ddot{t}}{\dot{t}^6} + 45\dfrac{\ddot{p}_s\ddot{t}^2}{\dot{t}^7} - 10\dfrac{\ddot{p}_s\dddot{t}}{\dot{t}^6} + 60\dfrac{\ddot{p}_s\ddot{t}\dddot{t}}{\dot{t}^7} - 5\dfrac{\ddot{p}_s\overset{4}{t}}{\dot{t}^6} \\ \quad - 105\dfrac{\ddot{p}_s\ddot{t}^3}{\dot{t}^8} + 15\dfrac{\dot{p}_s\ddot{t}\overset{4}{t}}{\dot{t}^7} - \dfrac{\dot{p}_s\overset{5}{t}}{\dot{t}^6} - 105\dfrac{\dot{p}_s\ddot{t}^2\dddot{t}}{\dot{t}^8} + 10\dfrac{\dot{p}_s\ddot{t}^2}{\dot{t}^7} + 105\dfrac{\dot{p}_s\ddot{t}^4}{\dot{t}^9} \end{cases}$$

u. s. w. Mit Hülfe dieser Formeln überzeugt man sich von der Richtigkeit folgender Beziehungen, in welchen A irgend eine beliebige Function der Zeit, der Koordinaten und beliebiger anderer Gröfsen, welche ihrerseits von der Zeit und den Koordinaten abhängen, ist. Die Beziehungen lauten:

$$(3)\quad \begin{cases} -A\dot{t}\dfrac{\partial p_s^{(\varkappa)}}{\partial \dot{t}} + \dfrac{d}{du}\left(A\dot{t}\dfrac{\partial p_s^{(\varkappa)}}{\partial \ddot{t}}\right) - \cdots + (-1)^{\varkappa}\dfrac{d^{\varkappa-1}}{du^{\varkappa-1}}\left(A\dot{t}\dfrac{\partial p_s^{(\varkappa)}}{\partial \overset{\varkappa}{t}}\right) \\ = p_s^{(\varkappa)}A - p_s^{(\varkappa-1)}\dfrac{dA}{dt} + \cdots + (-1)^{\varkappa-1}p_s'\dfrac{d^{\varkappa-1}A}{dt^{\varkappa-1}}, \end{cases}$$

ferner

$$(4)\quad \begin{cases} A\dot{t}\dfrac{\partial p_s^{(\varkappa)}}{\partial \dot{p}_s} - \dfrac{d}{du}\left(A\dot{t}\dfrac{\partial p_s^{(\varkappa)}}{\partial \ddot{p}_s}\right) + \cdots + (-1)^{\varkappa-1}\dfrac{d^{\varkappa-1}}{du^{\varkappa-1}}\left(A\dot{t}\dfrac{\partial p_s^{(\varkappa)}}{\partial \overset{\varkappa}{p}_s}\right) \\ = (-1)^{\varkappa-1}\dfrac{d^{\varkappa-1}A}{dt^{\varkappa-1}} \end{cases}$$

und endlich

$$(5)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{\mu}^{\nu-1}\frac{1}{\mu!}\sum_{\Sigma\psi=\varkappa}^{\psi\geq 1}\frac{\varkappa!}{\psi_1!\cdots\psi_\mu!}\overset{\psi_1}{t}\cdots\overset{\psi_\mu}{t}\sum_{\varkappa+1}^{\nu}{}^{\lambda}(-1)^{\lambda-\varkappa-1}\frac{d^{\lambda-\varkappa-1}}{du^{\lambda-\varkappa-1}}\left(A\dot{t}\frac{\partial p_s^{(\nu)}}{\partial \overset{\lambda}{p}_s}\right) \\ = (-1)^{\nu-\mu-1}\dfrac{d^{\nu-\mu-1}A}{dt^{\nu-\mu-1}}. \end{cases}$$

Die Allgemeingültigkeit der Gleichungen (1), (1ª), (3), (4) und (5) werden wir im nächsten Kapitel zu beweisen haben. Hier wollen wir noch aus ihnen einige Folgerungen ziehen, welche wir später brauchen werden. Aus (3) folgt:

$$(3^{a})\quad \begin{cases} -\dfrac{d}{du}\left(A\dot{t}\dfrac{\partial p_s^{(\varkappa)}}{\partial \dot{t}}\right) + \dfrac{d^2}{du^2}\left(A\dot{t}\dfrac{\partial p_s^{(\varkappa)}}{\partial \ddot{t}}\right) - \cdots + (-1)^{\varkappa}\dfrac{d^{\varkappa}}{du^{\varkappa}}\left(A\dot{t}\dfrac{\partial p_s^{(\varkappa)}}{\partial \overset{\varkappa}{t}}\right) \\ = \dot{t}\cdot\dfrac{d}{dt}\left\{p_s^{(\varkappa)}A - p_s^{(\varkappa-1)}\dfrac{dA}{dt} + \cdots + (-1)^{\varkappa-1}p_s'\dfrac{d^{\varkappa-1}A}{dt^{\varkappa-1}}\right\}. \end{cases}$$

Die in (2) angeführten $p_s^{(\varkappa)}$ sind homogene, lineare Funktionen der $\overset{\lambda}{p}_s$, und dieses wird, wie man sich aus (2) leicht überzeugt, auch bei den höheren $p_s^{(\varkappa)}$ der Fall sein. Dann ist aber nach dem Eulerschen Satze von homogenen Funktionen ganz allgemein

$$p_s^{(\varkappa)} = \frac{\partial p_s^{(\varkappa)}}{\partial \dot{p}_s}\dot{p}_s + \frac{\partial p_s^{(\varkappa)}}{\partial \ddot{p}_s}\ddot{p}_s + \cdots + \frac{\partial p_s^{(\varkappa)}}{\partial \overset{\varkappa}{p}_s}\overset{\varkappa}{p}_s.$$

Dafs in $p_s^{(\varkappa)}$ keine höheren Ableitungen als $\overset{\varkappa}{p}_s$ enthalten sind, ist ebenfalls aus (2) leicht ersichtlich. Da nun die $\dfrac{\partial p_s^{(\varkappa)}}{\partial \overset{\lambda}{p}_s}$ blofs Ableitungen

von t nach u enthalten, nichts aber von den Ableitungen von p_s nach u, so werden sie auch dann als Koeffizienten auftreten, wenn nicht p_s, sondern die willkürliche Funktion A $\varkappa$-mal nach t differenziert wird, d. h. es wird

$$A^{(\varkappa)} = \frac{\partial p_s^{(\varkappa)}}{\partial \dot{p}_s}\dot{A} + \frac{\partial p_s^{(\varkappa)}}{\partial \ddot{p}_s}A + \cdots + \frac{\partial p_s^{(\varkappa)}}{\partial \overset{\varkappa}{p}_s}\overset{\varkappa}{A}$$

sein, oder, was dasselbe ist:

$$\frac{d^{\varkappa}A}{dt^{\varkappa}} = \frac{\partial p_s^{(\varkappa)}}{\partial \dot{p}_s}\frac{dA}{du} + \frac{\partial p_s^{(\varkappa)}}{\partial \ddot{p}_s}\frac{d^2A}{du^2} + \cdots + \frac{\partial p_s^{(\varkappa)}}{\partial \overset{\varkappa}{p}_s}\frac{d^{\varkappa}A}{du^{\varkappa}}.$$

Stellen wir nun diese Gleichung mit der aus (4) durch Differentiation sich ergebenden:

$$(4^{a})\quad \begin{cases} -\dfrac{d}{du}\left(A\dot{t}\dfrac{\partial p_s^{(\varkappa)}}{\partial \dot{p}_s}\right) + \dfrac{d^2}{du^2}\left(A\dot{t}\dfrac{\partial p_s^{(\varkappa)}}{\partial \ddot{p}_s}\right) - \cdots + (-1)^{\varkappa}\dfrac{d^{\varkappa}}{du^{\varkappa}}\left(A\dot{t}\dfrac{\partial p_s^{(\varkappa)}}{\partial \overset{\varkappa}{p}_s}\right) \\ = (-1)^{\varkappa}\cdot\dot{t}\cdot\dfrac{d^{\varkappa}A}{dt^{\varkappa}} \end{cases}$$

zusammen, so geht diese über in:

$$(4^{b})\quad \begin{cases} -\dfrac{d}{du}\left(A\dot{t}\dfrac{\partial p_s^{(\varkappa)}}{\partial \dot{p}_s}\right) + \dfrac{d^2}{du^2}\left(A\dot{t}\dfrac{\partial p_s^{(\varkappa)}}{\partial \ddot{p}_s}\right) - \cdots + (-1)^{\varkappa}\dfrac{d^{\varkappa}}{du^{\varkappa}}\left(A\dot{t}\dfrac{\partial p_s^{(\varkappa)}}{\partial \overset{\varkappa}{p}_s}\right) \\ = (-1)^{\varkappa}\cdot\dot{t}\cdot\left\{\dfrac{\partial p_s^{(\varkappa)}}{\partial \dot{p}_s}\dfrac{dA}{du} + \dfrac{\partial p_s^{(\varkappa)}}{\partial \ddot{p}_s}\dfrac{d^2A}{du^2} + \cdots + \dfrac{\partial p_s^{(\varkappa)}}{\partial \overset{\varkappa}{p}_s}\dfrac{d^{\varkappa}A}{du^{\varkappa}}\right\}. \end{cases}$$

§ 4.

Beweis der angegebenen Formeln.

Um die durch Rechnung gefundenen Formeln als allgemeingültig nachzuweisen, brauchen wir blofs (1), (3), (4) und (5) zu beweisen, da aus ihnen die übrigen folgen.

Wir beginnen mit (1) und bemerken, dafs sich (1ª) in genau derselben Weise ergiebt, wenn man statt p_s in dem folgenden Beweise überall δp_s schreibt. Nachdem wir (1) bei $\dot{p}_s, \cdots, \overset{5}{p}_s$ als richtig befunden haben, setzen wir nun die Gültigkeit für $\varkappa = \nu$ voraus und untersuchen, ob sie auch bei $\varkappa = \nu + 1$ bestehen bleibt. Es ist

$$\overset{\nu+1}{p}_s = \frac{d\overset{\nu}{p}_s}{du};$$

wir müssen also die rechte Seite der für $\varkappa = \nu$ gebildeten Gleichung (1) nach u postenweise differentiieren. Greifen wir einen Posten

$$\frac{p_s^{(\lambda)}}{\lambda!}\sum_{\Sigma\psi=\nu}^{\psi\geq 1}\frac{\nu!}{\psi_1!\,\psi_2!\cdots\psi_\lambda!}\overset{\psi_1}{t}\cdots\overset{\psi_\lambda}{t}$$

heraus, so giebt er bei der Differentiation nach u:

$$(6)\quad\begin{cases}\dfrac{p_s^{(\lambda)}}{\lambda!}\displaystyle\sum_{\Sigma\psi=\nu}^{\psi\geq 1}\frac{\nu!}{\psi_1!\cdots\psi_\lambda!}\left\{\overset{\psi_1+1}{t}\,\overset{\psi_2}{t}\cdots\overset{\psi_\lambda}{t}+\overset{\psi_1}{t}\,\overset{\psi_2+1}{t}\,\overset{\psi_3}{t}\cdots\overset{\psi_\lambda}{t}+\cdots+\overset{\psi_1}{t}\,\overset{\psi_2}{t}\cdots\overset{\psi_\lambda+1}{t}\right\}\\ \qquad+\dfrac{p_s^{(\lambda+1)}}{\lambda!}\displaystyle\sum_{\Sigma\psi=\nu}^{\psi\geq 1}\frac{\nu!}{\psi_1!\cdots\psi_\lambda!}\overset{\psi_1}{t}\,\overset{\psi_2}{t}\cdots\overset{\psi_\lambda}{t}\cdot\dot{t},\end{cases}$$

indem wir bei dem letzten Posten von der Beziehung

$$\frac{dp_s^{(\nu)}}{du}=\frac{dp_s^{(\nu)}}{dt}\frac{dt}{du}=p_s^{(\nu+1)}\cdot\dot{t}$$

Gebrauch machen. Hierin haben wir $\lambda=1,2,\cdots,\nu$ zu setzen, die Posten zu addieren und nach den Ableitungen von p_s zu ordnen. Wir bekommen p_s' blofs bei $\lambda=1$, und zwar aus dem ersten Summanden von (6) als

$$p_s'\sum_{\psi_1=\nu}\frac{\nu!}{\psi_1!}\overset{\psi_1+1}{t}=p_s'\overset{\nu+1}{t}.$$

Ebenso entsteht der Posten mit $p_s^{(\nu+1)}$ blofs aus $\lambda=\nu$, und zwar aus dem letzten Posten von (6) als

$$\frac{p_s^{(\nu+1)}}{\nu!}\sum_{\Sigma\psi=\nu}^{\psi\geq 1}\frac{\nu!}{\psi_1!\cdots\psi_\nu!}\overset{\psi_1}{t}\,\overset{\psi_2}{t}\cdots\overset{\psi_\nu}{t}=p_s^{(\nu+1)}(\dot{t})^{\nu+1}.$$

Die Coefficienten der übrigen $p_s^{(\varkappa)}$ setzen sich jedesmal aus zwei Summanden zusammen, so der von $p_s^{(\sigma+1)}$ aus dem zweiten Posten von (6) für $\lambda=\sigma$ und dem ersten für $\lambda=\sigma+1$:

$$\frac{p_s^{(\sigma+1)}}{(\sigma+1)!}\sum_{\Sigma\psi=\nu}^{\psi\geq 1}\nu!\left\{(\sigma+1)\frac{\overset{\psi_1}{t}\,\overset{\psi_2}{t}\cdots\overset{\psi_\sigma}{t}}{\psi_1!\cdots\psi_\sigma!}+\frac{\overset{\psi_1+1}{t}\,\overset{\psi_2}{t}\cdots\overset{\psi_{\sigma+1}}{t}}{\psi_1!\,\psi_2!\cdots(\psi_{\sigma+1})!}+\frac{\overset{\psi_1}{t}\,\overset{\psi_2+1}{t}\cdots\overset{\psi_{\sigma+1}}{t}}{\psi_1!\,\psi_2!\cdots\psi_{\sigma+1}!}\right.$$
$$\left.+\cdots+\frac{\overset{\psi_1}{t}\,\overset{\psi_2}{t}\cdots\overset{\psi_{\sigma+1}+1}{t}}{\psi_1!\cdots\psi_{\sigma+1}!}\right\}$$
$$=\frac{p_s^{(\sigma+1)}}{(\sigma+1)!}\sum_{\Sigma\psi=\nu}^{\psi\geq 1}\nu!\left\{(\sigma+1)\frac{\overset{\psi_1}{t}\,\overset{\psi_2}{t}\cdots\overset{\psi_\sigma}{t}}{\psi_1!\cdots\psi_\sigma!}+(\psi_1+1)\frac{\overset{\psi_1+1}{t}\,\overset{\psi_2}{t}\cdots\overset{\psi_{\sigma+1}}{t}}{(\psi_1+1)!\,\psi_2!\cdots\psi_{\sigma+1}!}\right.$$
$$\left.+(\psi_2+1)\frac{\overset{\psi_1}{t}\,\overset{\psi_2+1}{t}\cdots\overset{\psi_{\sigma+1}}{t}}{\psi_1!\,(\psi_2+1)!\cdots\psi_{\sigma+1}!}+\cdots+(\psi_{\sigma+1}+1)\frac{\overset{\psi_1}{t}\cdots\overset{\psi_{\sigma+1}+1}{t}}{\psi_1!\cdots(\psi_{\sigma+1}+1)!}\right\}.$$

Entwickelt man diese Ausdrücke vom zweiten ab, so sieht man, dafs sie sich nur durch die Reihenfolge der Summanden unterscheiden

und daher, die Faktoren $\psi_\varkappa+1$ einbegriffen, unter einander gleich sind, so dafs der ganze Posten sich auch folgendermafsen darstellen läfst:

$$\frac{p_s^{(\sigma+1)}}{(\sigma+1)!}\sum_{\Sigma\psi=\nu}^{\psi\geq 1}(\sigma+1)\,\nu!\left\{\frac{\overset{\psi_1}{\dot{t}}\,\overset{\psi_1}{t}\cdots\overset{\psi_\sigma}{t}}{1!\,\psi_1!\cdots\psi_\sigma!}+(\psi_{\sigma+1}+1)\frac{\overset{\psi_1}{t}\,\overset{\psi_2}{t}\cdots\overset{\psi_\sigma}{t}\,\overset{\psi_{\sigma+1}+1}{t}}{\psi_1!\cdots\psi_\sigma!\,(\psi_{\sigma+1}+1)!}\right\},$$

worin statt $(\psi_{\sigma+1}+1)$ auch jedes andere $(\psi_\varkappa+1)$ gesetzt werden könnte. Die Summe der Stellenzeiger ist in allen Posten $\nu+1$. Schreibt man auch den ersten Posten

$$(\psi_{\sigma+1}+1)\frac{\overset{\psi_1}{t}\cdots\overset{\psi_\sigma}{t}\,\overset{\psi_{\sigma+1}+1}{t}}{\psi_1!\cdots\psi_\sigma!\,(\psi_{\sigma+1}+1)!},$$

so ist wohl zu beachten, dafs, während alle übrigen $\psi>0$ sind, dieses $\psi_{\sigma+1}=0$ ist. Wir können dann den ganzen Posten folgendermafsen schreiben:

$$\frac{p_s^{(\sigma+1)}}{(\sigma+1)!}\sum_{\Sigma\psi=\nu}^{\psi_1,\cdots,\sigma\geq 1,\,\psi_{\sigma+1}\geq 0}(\sigma+1)\,\nu!\,(\psi_{\sigma+1}+1)\frac{\overset{\psi_1}{t}\,\overset{\psi_2}{t}\cdots\overset{\psi_\sigma}{t}\,\overset{\psi_{\sigma+1}+1}{t}}{\psi_1!\,\psi_2!\cdots\psi_\sigma!\,(\psi_{\sigma+1}+1)!},$$

und dieses ist, wie man leicht einsieht:

$$(7)\qquad\frac{p_s^{(\sigma+1)}}{(\sigma+1)!}\,\nu!\sum_{\Sigma\psi=\nu+1}^{\psi\geq 1}(\sigma+1)\,\psi_{\sigma+1}\frac{\overset{\psi_1}{t}\,\overset{\psi_2}{t}\cdots\overset{\psi_{\sigma+1}}{t}}{\psi_1!\,\psi_2!\cdots\psi_{\sigma+1}!}.$$

Ich behaupte nun, dafs

$$(8)\qquad\mu\sum_{\Sigma\psi=\varkappa}^{\psi\geq 1}\frac{\psi_\mu}{\psi_1!\cdots\psi_\mu!}\overset{\psi_1}{t}\cdots\overset{\psi_\mu}{t}=\varkappa\sum_{\Sigma\psi=\varkappa}^{\psi\geq 1}\frac{1}{\psi_1!\cdots\psi_\mu!}\overset{\psi_1}{t}\cdots\overset{\psi_\mu}{t}$$

ist. Könnte ich dieses beweisen, so würde (7) die Form annehmen:

$$\frac{p_s^{(\sigma+1)}}{(\sigma+1)!}\sum_{\Sigma\psi=\nu+1}^{\psi\geq 1}\frac{(\nu+1)!}{\psi_1!\cdots\psi_{\sigma+1}!}\overset{\psi_1}{t}\cdots\overset{\psi_{\sigma+1}}{t},$$

worin $\sigma=1,2,\cdots,\nu-1$ zu setzen wäre. Fügte man dann zu dieser Summe die bereits gefundenen p_s' und $p_s^{(\nu+1)}$, so gäbe die Gesamtsumme den Wert von $\overset{\nu+1}{p_s}$ gerade in der Form (1), und somit wäre die allgemeine Gültigkeit von (1) nachgewiesen. Es handelt sich also nur noch um den Beweis von (8).

Bezeichnen wir der Kürze halber die linke Seite, abgesehen vom Faktor μ, mit M, die rechte ohne den Faktor $\varkappa$ mit K und entwickeln die Ausdrücke M und K, indem wir alle dem Summationsgesetze entsprechenden Kombinationen aufstellen, so finden wir

für:	ψ_1,	ψ_2,	$\cdots$,	$\psi_{\mu-2}$,	$\psi_{\mu-1}$,	ψ_μ
die Werte:	1,	1,	$\cdots$,	1,	1,	$\varkappa-(\mu-1)$
	1,	1,	$\cdots$,	1,	2,	$\varkappa-\mu$
	1,	1,	$\cdots$,	1,	3,	$\varkappa-\mu-1$
	.	.	.	.	.	.
	1,	1,	$\cdots$,	1,	$\varkappa-(\mu-1)$,	1
	1,	1,	$\cdots$,	2,	1,	$\varkappa-\mu$
	1,	1,	$\cdots$,	2,	2,	$\varkappa-\mu-1$
	.	.	.	.	.	.
	.	.	.	.	.	.
$\varkappa-(\mu-1)$,	1,	$\cdots$,		1,	1,	1.

Bildet man in jeder Kombination den Ausdruck

$$\frac{t^{\psi_1}\, t^{\psi_2} \cdots t^{\psi_\mu}}{\psi_1!\, \psi_2! \cdots \psi_\mu!},$$

so ist bei der Zusammensetzung von (8) jeder derartige Ausdruck in K einfach zu nehmen, dagegen ψ_μ-fach in M. Es wird nun, wie unmittelbar ersichtlich ist, in K

der Posten	$(t)^{\mu-1}\, t^{\varkappa-(\mu-1)}$	μ	mal vorkommen,
„ „	$(t)^{\mu-2}\, \ddot{t}\, t^{\varkappa-\mu}$	$\mu(\mu-1)$	„ „
„ „	$(t)^{\mu-2}\, \dddot{t}\, t^{\varkappa-\mu-1}$	$\mu(\mu-1)$	„ „
„ „	$(t)^{\mu-3}\, \ddot{t}^2\, t^{\varkappa-\mu-1}$	$\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{2}$	„ „ [1]
„ „	$(t)^{\mu-2}\, t^4\, t^{\varkappa-\mu-2}$	$\mu(\mu-1)$	„ „
„ „	$(t)^{\mu-3}\, \ddot{t}\, \dddot{t}\, t^{\varkappa-\mu-2}$	$\mu(\mu-1)(\mu-2)$	„ „
„ „	$(t)^{\mu-2}\, t^5\, t^{\varkappa-\mu-3}$	$\mu(\mu-1)$	„ „
„ „	$(t)^{\mu-3}\, \ddot{t}\, t^4\, t^{\varkappa-\mu-3}$	$\mu(\mu-1)(\mu-2)$	„ „
„ „	$(t)^{\mu-3}\, \dddot{t}^2\, t^{\varkappa-\mu-3}$	$\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{2}$	„ „ [1]

u. s. f.

Um das allgemeine Bildungsgesetz zu finden, verfolgen wir das Vorkommen eines Gliedes

$$1,\ 1,\ \cdots,\ 1,\ \alpha,\ \beta,\ \cdots,\ \lambda,$$

1) Da man es hier mit Kombinationen mit Wiederholung zu thun hat.

in welchem die Buchstabengröfsen λ von der Einheit verschiedene Stellenzeiger bedeuten. Wir sehen dann leicht ein, dafs das Glied

$$\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-(\lambda-1)) \text{ mal}$$

vorkommt, wenn keine gleichen Gröfsen unter den von der Einheit verschiedenen vorkommen, dagegen

$$\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-(\lambda-1))}{\beta\cdot\gamma\cdots} \text{ mal},$$

wenn Gruppen von β, γ, $\cdots$ unter einander gleichen vorkommen.

Untersuchen wir nun das Vorkommen desselben Gliedes in M, so finden wir z. B., dafs das Glied $(t)^{\mu-1}\, t^{\varkappa-(\mu-1)}$ einmal aus derjenigen Kombination stammt, in welcher $\psi_\mu = \varkappa-(\mu-1)$ ist, und daher $\varkappa-(\mu-1)$ mal in Rechnung gezogen werden mufs; ferner aber $\mu-1$ mal aus den übrigen Kombinationen, bei welchen $\psi_\mu = 1$ ist. Im ganzen hat also das Glied den Faktor

$$\varkappa-(\mu-1)+(\mu-1)=\varkappa$$

Das Glied $(t)^{\mu-2}\, \ddot{t}\, t^{\varkappa-\mu}$ stammt $\mu-1$ mal aus den Kombinationen mit $\psi_\mu=\varkappa-\mu$, ferner $\mu-1$ mal mit $\psi=2$ und endlich $(\mu-1)(\mu-2)$ mal mit $\psi_\mu=1$. Der Posten hat daher den Faktor

$$(\mu-1)(\varkappa-\mu)+2(\mu-1)+(\mu-1)(\mu-2)=\varkappa(\mu-1)$$

u. s. w. In derselben Weise, wie bei K findet man hier als das allgemeine Bildungsgesetz: bei verschiedenen Elementen unter den die Einheit übersteigenden

$$\varkappa(\mu-1)(\mu-2)\cdots(\mu-(\lambda-1)),$$

dagegen bei gleichen zu β, γ, $\cdots$

$$\frac{\varkappa(\mu-1)(\mu-2)\cdots(\mu-(\lambda-1))}{\beta\cdot\gamma\cdots}.$$

Sondert man nun bei den Gliedern in K den Faktor μ, bei denen in M den Faktor $\varkappa$ ab, so findet man dieselben Ausdrücke, d. h.

$$\mathsf{M}=\varkappa\mathsf{N} \quad \text{und} \quad \mathsf{K}=\mu\mathsf{N}.$$

Daraus folgt aber

$$\varkappa\mathsf{K}=\varkappa\mu\mathsf{N}=\mu\mathsf{M},$$

was gerade die zu beweisende Gleichung (8) ist. Mit diesem Beweis

von (8) ist aber, wie bereits auseinandergesetzt, auch der Beweis von (1) und (1ª) abgeschlossen.

Wir gehen nun zur Gleichung (3) über und setzen in gleicher Weise die Gültigkeit von

$$(3)\quad \begin{cases} -At\dfrac{\partial p_s^{(\varkappa)}}{\partial \dot t} + \dfrac{d}{du}\left(At\dfrac{\partial p_s^{(\varkappa)}}{\partial \ddot t}\right) - \cdots + (-1)^{\varkappa}\dfrac{d^{\varkappa-1}}{du^{\varkappa-1}}\left(At\dfrac{\partial p_s^{(\varkappa)}}{\partial^{\varkappa} t}\right) \\ = p_s^{(\varkappa)}A - p_s^{(\varkappa-1)}\dfrac{dA}{dt} + \cdots + (-1)^{\varkappa-1}p_s'\dfrac{d^{\varkappa-1}A}{dt^{\varkappa-1}} \end{cases}$$

für eine bestimmte Zahl $\varkappa$ voraus, um sie dann für $\varkappa+1$ zu untersuchen. Es ist

$$p_s^{(\varkappa+1)} = \frac{dp_s^{(\varkappa)}}{dt} = \frac{1}{\dot t}\frac{dp_s^{(\varkappa)}}{du}$$
$$= \frac{1}{\dot t}\left\{\frac{\partial p_s^{(\varkappa)}}{\partial \dot t}\ddot t + \frac{\partial p_s^{(\varkappa)}}{\partial \ddot t}\dddot t + \cdots + \frac{\partial p_s^{(\varkappa)}}{\partial^{\varkappa} t}{}^{\varkappa+1}t\right.$$
$$\left. + \frac{\partial p_s^{(\varkappa)}}{\partial \dot p_s}\ddot p_s + \frac{\partial p_s^{(\varkappa)}}{\partial \ddot p_s}\dddot p_s + \cdots + \frac{\partial p_s^{(\varkappa)}}{\partial^{\varkappa} p_s}{}^{\varkappa+1}p_s\right\},$$

woraus folgt:

$$\left(\frac{\partial p_s^{(\varkappa+1)}}{\partial^{\lambda} t}\right)_{\lambda>1} = \frac{1}{\dot t}\left\{\frac{\partial p_s^{(\varkappa)}}{\partial^{\lambda-1} t} + \frac{\partial^2 p_s^{(\varkappa)}}{\partial \dot t\,\partial^{\lambda} t}\ddot t + \frac{\partial^2 p_s^{(\varkappa)}}{\partial \ddot t\,\partial^{\lambda} t}\dddot t + \cdots + \frac{\partial^2 p_s^{(\varkappa)}}{\partial^{\varkappa} t\,\partial^{\lambda} t}{}^{\varkappa+1}t\right.$$
$$\left. + \frac{\partial^2 p_s^{(\varkappa)}}{\partial \dot p_s\,\partial^{\lambda} t}\ddot p_s + \frac{\partial^2 p_s^{(\varkappa)}}{\partial \ddot p_s\,\partial^{\lambda} t}\dddot p_s + \cdots + \frac{\partial^2 p_s^{(\varkappa)}}{\partial^{\varkappa} p_s\,\partial^{\lambda} t}{}^{\varkappa+1}p_s\right\}$$
$$= \frac{1}{\dot t}\left\{\frac{\partial p_s^{(\varkappa)}}{\partial^{\lambda-1} t} + \frac{d}{du}\left(\frac{\partial p_s^{(\varkappa)}}{\partial^{\lambda} t}\right)\right\},$$

während:

$$\frac{\partial p_s^{(\varkappa+1)}}{\partial \dot t} = -\frac{1}{\dot t^2}\frac{dp_s^{(\varkappa)}}{du} + \frac{1}{\dot t}\left\{\frac{\partial^2 p_s^{(\varkappa)}}{\partial \dot t\,\partial \dot t}\ddot t + \frac{\partial^2 p_s^{(\varkappa)}}{\partial \ddot t\,\partial \dot t}\dddot t + \cdots + \frac{\partial^2 p_s^{(\varkappa)}}{\partial^{\varkappa} p_s\,\partial \dot t}{}^{\varkappa+1}t\right\}$$
$$= -\frac{1}{\dot t}p_s^{(\varkappa+1)} + \frac{1}{\dot t}\frac{d}{du}\left(\frac{\partial p_s^{(\varkappa)}}{\partial \dot t}\right)$$

ist. Wegen dieser Beziehungen ist nun, wenn wir mit B irgend eine willkürliche Funktion von derselben Art, wie unsere Funktion A, bezeichnen:

$$Bt\frac{\partial p_s^{(\varkappa+1)}}{\partial \dot t} - \frac{d}{du}\left(Bt\frac{\partial p_s^{(\varkappa+1)}}{\partial \ddot t}\right) + \cdots$$
$$+ (-1)^{\varkappa-1}\frac{d^{\varkappa-1}}{du^{\varkappa-1}}\left(Bt\frac{\partial p_s^{(\varkappa+1)}}{\partial^{\varkappa} t}\right) + (-1)^{\varkappa}\frac{d^{\varkappa}}{du^{\varkappa}}\left(Bt\frac{\partial p_s^{(\varkappa+1)}}{\partial^{\varkappa+1} t}\right)$$
$$= -Bp_s^{(\varkappa+1)} + B\frac{d}{du}\left(\frac{\partial p_s^{(\varkappa)}}{\partial \dot t}\right) - \frac{d}{du}\left[B\frac{\partial p_s^{(\varkappa)}}{\partial \dot t}\right] - \frac{d}{du}\left[B\frac{d}{du}\left(\frac{\partial p_s^{(\varkappa)}}{\partial \ddot t}\right)\right]$$
$$+ \frac{d^2}{du^2}\left[B\frac{\partial p_s^{(\varkappa)}}{\partial \ddot t}\right] + \frac{d^2}{du^2}\left[B\frac{d}{du}\left(\frac{\partial p_s^{(\varkappa)}}{\partial \dddot t}\right)\right] - \cdots$$
$$+ (-1)^{\varkappa-2}\frac{d^{\varkappa-2}}{du^{\varkappa-2}}\left[B\frac{\partial p_s^{(\varkappa)}}{\partial^{\varkappa-2} t}\right] + (-1)^{\varkappa-2}\frac{d^{\varkappa-2}}{du^{\varkappa-2}}\left[B\frac{d}{du}\left(\frac{\partial p_s^{(\varkappa)}}{\partial^{\varkappa-1} t}\right)\right]$$
$$+ (-1)^{\varkappa-1}\frac{d^{\varkappa-1}}{du^{\varkappa-1}}\left[B\frac{\partial p_s^{(\varkappa)}}{\partial^{\varkappa-1} t}\right] + (-1)^{\varkappa-1}\frac{d^{\varkappa-1}}{du^{\varkappa-1}}\left[B\frac{d}{du}\left(\frac{\partial p_s^{(\varkappa)}}{\partial^{\varkappa} t}\right)\right]$$
$$+ (-1)^{\varkappa}\frac{d^{\varkappa}}{du^{\varkappa}}\left[B\frac{\partial p_s^{(\varkappa)}}{\partial^{\varkappa} t}\right]$$
$$= -Bp_s^{(\varkappa+1)} - \frac{dB}{du}\frac{\partial p_s^{(\varkappa)}}{\partial \dot t} + \frac{d}{du}\left[\frac{dB}{du}\frac{\partial p_s^{(\varkappa)}}{\partial \ddot t}\right] - \cdots$$
$$(9)\quad + (-1)^{\varkappa-1}\frac{d^{\varkappa-2}}{du^{\varkappa-2}}\left[\frac{dB}{du}\cdot\frac{\partial p_s^{(\varkappa)}}{\partial^{\varkappa-1} t}\right] + (-1)^{\varkappa}\frac{d^{\varkappa-1}}{du^{\varkappa-1}}\left[\frac{dB}{du}\cdot\frac{\partial p_s^{(\varkappa)}}{\partial^{\varkappa} t}\right].$$

Setzt man in (3), was wir für $\varkappa$ als gültig vorausgesetzt haben,

$$A\dot t = \frac{dB}{du}, \quad \text{also} \quad A = \frac{dB}{dt},$$

so erhält man daraus:

$$-\frac{dB}{du}\frac{\partial p_s^{(\varkappa)}}{\partial \dot t} + \frac{d}{du}\left[\frac{dB}{du}\frac{\partial p_s^{(\varkappa)}}{\partial \ddot t}\right] - \cdots + (-1)^{\varkappa}\frac{d^{\varkappa-1}}{du^{\varkappa-1}}\left[\frac{dB}{du}\frac{\partial p_s^{(\varkappa)}}{\partial^{\varkappa} t}\right]$$
$$= p_s^{(\varkappa)}\frac{dB}{dt} - p_s^{(\varkappa-1)}\frac{d^2B}{dt^2} + \cdots + (-1)^{\varkappa-1}p_s'\frac{d^{\varkappa}B}{dt^{\varkappa}}.$$

Infolgedessen geht (9) über in:

$$Bt\frac{\partial p_s^{(\varkappa+1)}}{\partial \dot t} - \frac{d}{du}\left(Bt\frac{\partial p_s^{(\varkappa+1)}}{\partial \ddot t}\right) + \cdots + (-1)^{\varkappa}\frac{d^{\varkappa}}{du^{\varkappa}}\left(Bt\frac{\partial p^{(\varkappa+1)}}{\partial^{\varkappa+1} t}\right)$$
$$= -Bp_s^{(\varkappa+1)} + \frac{dB}{dt}p_s^{(\varkappa)} - \cdots + (-1)^{\varkappa-1}\frac{d^{\varkappa}B}{dt^{\varkappa}}p_s'.$$

Dieses ist aber nichts Anderes als die Gleichung (3) für $\varkappa + 1$, in welcher blofs A durch B ersetzt ist, was für die Sache natürlich gar nichts besagt. Somit ist (3) und also auch (3ª) als allgemein gültig nachgewiesen.

Genau ebenso verfahren wir bei dem Beweise der Formel (4). Wir setzen ihre Richtigkeit für $\varkappa$ voraus und suchen, Schlüsse auf $\varkappa + 1$ zu ziehen. Wegen der Homogenität der $p_s^{(\varkappa)}$ in den $\overset{\lambda}{p}_s$ besteht die schon einmal angeführte Eulersche Beziehung:

$$p_s^{(\varkappa)} = \frac{\partial p_s^{(\varkappa)}}{\partial \dot{p}_s}\dot{p}_s + \frac{\partial p_s^{(\varkappa)}}{\partial \ddot{p}_s}\ddot{p}_s + \cdots + \frac{\partial p_s^{(\varkappa)}}{\partial \overset{\varkappa}{p}_s}\overset{\varkappa}{p}_s,$$

aus welcher folgt:

$$\frac{\partial p_s^{(\varkappa+1)}}{\partial \overset{\lambda}{p}_s} = \frac{\partial}{\partial \overset{\lambda}{p}_s}\left[\frac{d p_s^{(\varkappa)}}{dt}\right] = \frac{1}{\dot{t}}\frac{\partial p_s^{(\varkappa)}}{\partial \overset{\lambda-1}{p}_s} + \frac{1}{\dot{t}}\frac{d}{du}\left(\frac{\partial p_s^{(\varkappa)}}{\partial \overset{\lambda}{p}_s}\right).$$

Mit Hülfe dieses Ausdruckes bilden wir die linke Seite von (4) für $\varkappa + 1$:

$$\begin{aligned}
&-A\dot{t}\frac{\partial p_s^{(\varkappa+1)}}{\partial \dot{p}_s} + \frac{d}{du}\left(A\dot{t}\frac{\partial p_s^{(\varkappa+1)}}{\partial \ddot{p}_s}\right) - \cdots + (-1)^{\varkappa+1}\frac{d^\varkappa}{du^\varkappa}\left(A\dot{t}\frac{\partial p_s^{(\varkappa+1)}}{\partial^{\varkappa+1}\dot{p}_s}\right)\\
&= -A\frac{d}{du}\left(\frac{\partial p_s^{(\varkappa)}}{\partial \dot{p}_s}\right) + \frac{d}{du}\left[A\frac{\partial p_s^{(\varkappa)}}{\partial \ddot{p}_s} + A\frac{d}{du}\left(\frac{\partial p_s^{(\varkappa)}}{\partial \dddot{p}_s}\right)\right]\\
&\quad - \frac{d^2}{du^2}\left[A\frac{\partial p_s^{(\varkappa)}}{\partial \dddot{p}_s} + A\frac{d}{du}\left(\frac{\partial p_s^{(\varkappa)}}{\partial \overset{4}{p}_s}\right)\right]\\
&\quad + \cdots + (-1)^{\varkappa+1}\frac{d^\varkappa}{du^\varkappa}\left[A\frac{\partial p_s^{(\varkappa)}}{\partial \overset{\varkappa}{p}_s}\right].
\end{aligned} \tag{10}$$

Ordnen wir darin die Glieder nach den $\frac{\partial p_s^{(\varkappa)}}{\partial \overset{\lambda}{p}_s}$, so finden wir für $\lambda = 1, 2, \cdots, \varkappa$ jedesmal

$$(-1)^\lambda\left[\frac{d^{\lambda-1}}{du^{\lambda-1}}\left(A\frac{d}{du}\left(\frac{\partial p_s^{(\varkappa)}}{\partial \overset{\lambda}{p}_s}\right)\right) - \frac{d^\lambda}{du^\lambda}\left(A\frac{\partial p_s^{(\varkappa)}}{\partial \overset{\lambda}{p}_s}\right)\right]$$

oder:

$$(-1)^{\lambda-1}\frac{d^{\lambda-1}}{du^{\lambda-1}}\left(\frac{dA}{du}\cdot\frac{\partial p_s^{(\varkappa)}}{\partial \overset{\lambda}{p}_s}\right),$$

so dafs (10) folgende Form annimmt:

$$\begin{aligned}
&-A\dot{t}\frac{\partial p_s^{(\varkappa+1)}}{\partial \dot{p}_s} + \frac{d}{du}\left(A\dot{t}\frac{\partial p_s^{(\varkappa+1)}}{\partial \ddot{p}_s}\right) - \cdots + (-1)^{\varkappa+1}\frac{d^\varkappa}{du^\varkappa}\left(A\dot{t}\frac{\partial p_s^{(\varkappa+1)}}{\partial^{\varkappa+1}\dot{p}_s}\right)\\
&= \frac{dA}{du}\cdot\frac{\partial p_s^{(\varkappa)}}{\partial \dot{p}_s} - \frac{d}{du}\left[\frac{dA}{du}\cdot\frac{\partial p_s^{(\varkappa)}}{\partial \ddot{p}_s}\right] + \cdots + (-1)^{\varkappa-1}\frac{d^{\varkappa-1}}{du^{\varkappa-1}}\left[\frac{dA}{du}\cdot\frac{\partial p_s^{(\varkappa)}}{\partial \overset{\varkappa}{p}_s}\right].
\end{aligned}$$

Setzen wir nun

$$\frac{dA}{du} = B\dot{t}, \quad \text{also} \quad B = \frac{1}{\dot{t}}\frac{dA}{du} = \frac{dA}{dt},$$

so lautet die eben erhaltene Gleichung

$$\begin{aligned}
&A\dot{t}\frac{\partial p_s^{(\varkappa+1)}}{\partial \dot{p}_s} - \frac{d}{du}\left(A\dot{t}\frac{\partial p_s^{(\varkappa+1)}}{\partial \ddot{p}_s}\right) + \cdots + (-1)^\varkappa\frac{d^\varkappa}{du^\varkappa}\left(A\dot{t}\frac{\partial p_s^{(\varkappa+1)}}{\partial^{\varkappa+1}\dot{p}_s}\right)\\
&\qquad = (-1)^{\varkappa+1}\frac{d^{\varkappa-1}B}{dt^{\varkappa-1}} = (-1)^\varkappa\frac{d^\varkappa A}{dt^\varkappa},
\end{aligned}$$

was gerade unsere Gleichung (4) für $\varkappa + 1$ ist. Hierdurch ist der Beweis von (4) und daher auch von (4ª) und (4ᵇ) geliefert.

Wir haben noch den Beweis von (5) zu liefern und zu dem Ende den Ausdruck:

$$\sum_\mu^\nu{}^\varkappa\frac{1}{\mu!}\sum_{\Sigma\psi=\varkappa}^{\psi\geq 1}\frac{\varkappa!}{\psi_1!\cdots\psi_\mu!}\dot{t}^{\psi_1}\cdots\dot{t}^{\psi_\mu}\sum_{\varkappa+1}^{\nu+1}{}^\lambda(-1)^{\lambda-\varkappa-1}\frac{d^{\lambda-\varkappa-1}}{du^{\lambda-\varkappa-1}}\left(A\dot{t}\frac{\partial p_s^{(\nu+1)}}{\partial \overset{\lambda}{p}_s}\right) \tag{11}$$

zu untersuchen, nachdem wir die Gültigkeit der Gleichung für $p_s^{(\nu)}$ und Summation über $\varkappa$ von μ bis $\nu - 1$ und über λ von $\varkappa + 1$ bis ν voraussetzen.

Bei dem Beweise von (4) haben wir gefunden:

$$\frac{\partial p_s^{(\nu+1)}}{\partial \overset{\lambda}{p}_s} = \frac{1}{\dot{t}}\frac{\partial p_s^{(\nu)}}{\partial \overset{\lambda-1}{p}_s} + \frac{1}{\dot{t}}\cdot\frac{d}{du}\left(\frac{\partial p_s^{(\nu)}}{\partial \overset{\lambda}{p}_s}\right),$$

so dafs der hier zu untersuchende Ausdruck folgendermafsen geschrieben werden kann:

$$\begin{aligned}
&\sum_\mu^\nu{}^\varkappa\frac{1}{\mu!}\sum_{\Sigma\psi=\varkappa}^{\psi\geq 1}\frac{\varkappa!}{\psi_1!\cdots\psi_\mu!}\dot{t}^{\psi_1}\cdots\dot{t}^{\psi_\mu}\sum_{\varkappa+1}^{\nu+1}{}^\lambda(-1)^{\lambda-\varkappa-1}\\
&\qquad\frac{d^{\lambda-\varkappa-1}}{du^{\lambda-\varkappa-1}}\cdot\left[A\frac{\partial p_s^{(\nu)}}{\partial \overset{\lambda-1}{p}_s} + A\frac{d}{du}\left(\frac{\partial p_s^{(\nu)}}{\partial \overset{\lambda}{p}_s}\right)\right].
\end{aligned} \tag{11ª}$$

Wir entwickeln zunächst die innerste Summe:

$$\sum_{\varkappa+1}^{\nu+1}(-1)^{\lambda-\varkappa-1}\frac{d^{\lambda-\varkappa-1}}{du^{\lambda-\varkappa-1}}\left[A\frac{\partial p_s^{(\nu)}}{\partial^{\lambda-1}p_s}+A\frac{d}{du}\left(\frac{\partial p_s^{(\nu)}}{\partial^{\lambda}p_s}\right)\right]$$

$$=A\frac{\partial p_s^{(\nu)}}{\partial^{\varkappa}p_s}+A\frac{d}{du}\left(\frac{\partial p_s^{(\nu)}}{\partial^{\varkappa+1}p_s}\right)-\frac{d}{du}\left[A\frac{\partial p_s^{(\nu)}}{\partial^{\varkappa+1}p_s}+A\frac{d}{du}\left(\frac{\partial p_s^{(\nu)}}{\partial^{\varkappa+2}p_s}\right)\right]$$

$$+\cdots+(-1)^{\nu-\varkappa}\frac{d^{\nu-\varkappa}}{du^{\nu-\varkappa}}\left[A\frac{\partial p_s^{(\nu)}}{\partial^{\nu}p_s}\right]$$

$$=A\frac{\partial p_s^{(\nu)}}{\partial^{\varkappa}p_s}-\frac{dA}{du}\frac{\partial p_s^{(\nu)}}{\partial^{\varkappa+1}p_s}+\frac{d}{du}\left[\frac{dA}{du}\cdot\frac{\partial p_s^{(\nu)}}{\partial^{\varkappa+2}p_s}\right]-\cdots$$

$$+(-1)^{\nu-\varkappa}\frac{d^{\nu-\varkappa-1}}{du^{\nu-\varkappa-1}}\left[\frac{dA}{du}\frac{\partial p_s^{(\nu)}}{\partial^{\nu}p_s}\right]$$

$$=A\frac{\partial p_s^{(\nu)}}{\partial^{\varkappa}p_s}-\sum_{\varkappa+1}^{\nu}(-1)^{\lambda-\varkappa-1}\frac{d^{\lambda-\varkappa-1}}{du^{\lambda-\varkappa-1}}\left[\frac{dA}{du}\cdot\frac{\partial p_s^{(\nu)}}{\partial^{\lambda}p_s}\right].$$

Setzen wir $\frac{dA}{du}=Bt$, so geht die Gleichung (11ª) wegen der eben ausgeführten Umformung über in:

$$\sum_{\mu}^{\nu}\frac{1}{\mu!}\sum_{\Sigma\psi=\varkappa}^{\psi\geq 1}\frac{\varkappa!}{\psi_1!\cdots\psi_\mu!}t^{\psi_1}\cdots t^{\psi_\mu}\cdot A\frac{\partial p_s^{(\nu)}}{\partial^{\varkappa}p_s}$$

$$(12)\qquad -\sum_{\mu}^{\nu}\frac{1}{\mu!}\sum_{\Sigma\psi=\varkappa}^{\psi\geq 1}\frac{\varkappa!}{\psi_1!\cdots\psi_\mu!}t^{\psi_1}\cdots t^{\psi_\mu}\sum_{\varkappa+1}^{\nu}(-1)^{\lambda-\varkappa-1}\frac{d^{\lambda-\varkappa-1}}{du^{\lambda-\varkappa-1}}\left(Bt\frac{\partial p_s^{(\nu)}}{\partial^{\lambda}p_s}\right).$$

Für $p_s^{(\nu)}$ haben wir die Gültigkeit der Gleichung (5) vorausgesetzt, und deswegen können wir den letzten Posten des eben erhaltenen Ausdrucks, wenn wir für B seinen Wert $\frac{1}{t}\frac{dA}{du}=\frac{dA}{dt}$ einführen, durch

$$(-1)^{\nu-\mu}\frac{d^{\nu-\mu}A}{dt^{\nu-\mu}}$$

ersetzen.

Unser Ausdruck unterscheidet sich allerdings scheinbar von (5) insofern, als bei uns die Summation über $\varkappa$ bis zu $\varkappa=\nu$ geht, dagegen in (5) blofs bis zu $\varkappa=\nu-1$. Dieser Unterschied ist aber blofs ein scheinbarer, indem auch in unserm Ausdrucke wegen der innersten Summe $\varkappa+1\leq\nu$ sein mufs, also der Posten $\varkappa=\nu$ gar nichts für die Summation liefert. Wir können daher (12) in die Form setzen:

$$(13)\qquad \sum_{\mu}^{\nu}\frac{1}{\mu!}\sum_{\Sigma\psi=\varkappa}^{\psi\geq 1}\frac{\varkappa!}{\psi_1!\cdots\psi_\mu!}t^{\psi_1}\cdots t^{\psi_\mu}\cdot A\frac{\partial p_s^{(\nu)}}{\partial^{\varkappa}p_s}+(-1)^{\nu-\mu}\frac{d^{\nu-\mu}A}{dt^{\nu-\mu}}.$$

Nun finden wir durch Rechnung bei einer Reihe von $p_s^{(\nu)}$ für $\mu\leqq\nu-1$ folgende Identität:

$$(14)\qquad \sum_{\mu}^{\nu}\sum_{\Sigma\psi=\varkappa}^{\psi\geq 1}\frac{\varkappa!}{\psi_1!\cdots\psi_\mu!}t^{\psi_1}\cdots t^{\psi_\mu}\frac{\partial p_s^{(\nu)}}{\partial^{\varkappa}p_s}\equiv 0.$$

Gelänge es uns, diese Identität als allgemein gültig nachzuweisen, so würde der erste Posten von (13) verschwinden, da A und $\frac{1}{\mu!}$ vor die Summe gesetzt werden können. Da aber (13) aus (11) abgeleitet war, so wäre dadurch der Beweis von (5) geliefert, denn der noch übrige Fall $\mu=\nu$ ergiebt sich aus (11) und (5) als Identität $A=A$. Unser Beweis ist also auf den von (14) reduziert.

Multiplizieren wir (14) mit der Konstanten $\frac{1}{\mu!}$, so kann die Gleichung infolge von (1) folgendermafsen geschrieben werden:

$$\sum_{\mu}^{\nu}\frac{\partial\overset{\varkappa}{p}_s}{\partial p_s^{(\mu)}}\frac{\partial p_s^{(\nu)}}{\partial\overset{\varkappa}{p}_s}=0$$

oder:

$$(15)\qquad \frac{\partial p_s^{(\nu)}}{\partial\overset{\mu}{p}_s}\frac{\partial\overset{\mu}{p}_s}{\partial p_s^{(\mu)}}+\frac{\partial p_s^{(\nu)}}{\partial^{\mu+1}p_s}\frac{\partial^{\mu+1}p_s}{\partial p_s^{(\mu)}}+\cdots+\frac{\partial p_s^{(\nu)}}{\partial\overset{\nu}{p}_s}\frac{\partial\overset{\nu}{p}_s}{\partial p_s^{(\mu)}}=0.$$

Dieses ist, wie gesagt, bei einer Reihe von $p_s^{(\nu)}$ als richtig befunden worden, so dafs wir es für ν voraussetzen können, um für $\nu+1$ zu prüfen.

Wir haben bereits gefunden:

$$\frac{\partial p_s^{(\nu+1)}}{\partial^{\lambda}p_s}=\frac{1}{t}\frac{\partial p_s^{(\nu)}}{\partial^{\lambda-1}p_s}+\frac{1}{t}\frac{d}{du}\left(\frac{\partial p_s^{(\nu)}}{\partial^{\lambda}p_s}\right).$$

Daraus können wir die linke Seite von (15) für $\nu+1$ zusammensetzen als:

$$\frac{1}{t}\left\{\frac{\partial p_s^{(\nu)}}{\partial^{\mu-1}p_s}\frac{\partial\overset{\mu}{p}_s}{\partial p_s^{(\mu)}}+\frac{\partial p_s^{(\nu)}}{\partial\overset{\mu}{p}_s}\frac{\partial^{\mu+1}p_s}{\partial p_s^{(\mu)}}+\cdots+\frac{\partial p_s^{(\nu)}}{\partial\overset{\nu}{p}_s}\frac{\partial^{\nu+1}p_s}{\partial p_s^{(\mu)}}\right\}$$

$$(16)\qquad +\frac{1}{t}\left\{\frac{d}{du}\left(\frac{\partial p_s^{(\nu)}}{\partial\overset{\mu}{p}_s}\right)\cdot\frac{\partial\overset{\mu}{p}_s}{\partial p_s^{(\mu)}}+\frac{d}{du}\left(\frac{\partial p_s^{(\nu)}}{\partial^{\mu+1}p_s}\right)\cdot\frac{\partial^{\mu+1}p_s}{\partial p_s^{(\mu)}}+\cdots+\frac{d}{du}\left(\frac{\partial p_s^{(\nu)}}{\partial^{\nu+1}p_s}\right)\frac{\partial^{\nu+1}p_s}{\partial p_s^{(\mu)}}\right\}.$$

Nun ist aber auch $\overset{\varkappa}{p}_s$ linear, homogen in $p_s^{(\lambda)}$ und daher

$$\overset{\varkappa-1}{p}_s = \frac{\partial \overset{\varkappa-1}{p}_s}{\partial p_s'} p_s' + \frac{\partial \overset{\varkappa-1}{p}_s}{\partial p_s''} p_s'' + \cdots + \frac{\partial \overset{\varkappa-1}{p}_s}{\partial p_s^{(\varkappa-1)}} p_s^{(\varkappa-1)},$$

woraus folgt:

$$\frac{\partial \overset{\varkappa}{p}_s}{\partial p_s^{(\lambda)}} = \frac{\partial}{\partial p_s^{(\lambda)}}\left(\frac{\partial \overset{\varkappa-1}{p}_s}{\partial u}\right) = \frac{d}{du}\left(\frac{\partial \overset{\varkappa-1}{p}_s}{\partial p_s^{(\lambda)}}\right) + t\,\frac{\partial \overset{\varkappa-1}{p}_s}{\partial p_s^{(\lambda-1)}}.$$

Demnach geht (16) über in:

$$\frac{\partial p_s^{(\nu)}}{\partial \overset{\mu-1}{p}_s}\frac{\partial \overset{\mu-1}{p}_s}{\partial p_s^{(\mu-1)}} + \frac{\partial p_s^{(\nu)}}{\partial \overset{\mu}{p}_s}\frac{\partial \overset{\mu}{p}_s}{\partial p_s^{(\mu-1)}} + \cdots + \frac{\partial p_s^{(\nu)}}{\partial \overset{\nu}{p}_s}\frac{\partial \overset{\nu}{p}_s}{\partial p_s^{(\mu-1)}}$$
$$+ \frac{1}{t}\cdot\frac{d}{du}\left\{\frac{\partial p_s^{(\nu)}}{\partial \overset{\mu}{p}_s}\frac{\partial \overset{\mu}{p}_s}{\partial p_s^{(\mu)}} + \frac{\partial p_s^{(\nu)}}{\partial \overset{\mu+1}{p}_s}\frac{\partial \overset{\mu+1}{p}_s}{\partial \overset{\mu}{p}_s} + \cdots + \frac{\partial p_s^{(\nu)}}{\partial \overset{\nu}{p}_s}\frac{\partial \overset{\nu+1}{p}_s}{\partial p_s^{(\mu)}}\right\},$$

da $\frac{\partial \overset{\mu-1}{p}_s}{\partial \overset{\mu}{p}_s} = 0$ und $\frac{\partial p_s^{(\nu)}}{\partial \overset{\nu+1}{p}_s} = 0$ ist. Ersetzt man aber in (15) μ durch $\mu - 1$, da ja (15) bei den geprüften $p_s^{(\nu)}$ für jedes μ gelten sollte, so findet man, dafs jede der Klammern in dem eben erhaltenen Ausdruck verschwindet, wodurch (15) und also auch (5) allgemein bewiesen ist.

Somit haben wir alle Hülfsformeln bewiesen und können sie dem folgenden zu Grunde legen.

§ 5.

Bildung der Grundvariation.

Für die in § 2 definierte Funktion H wollen wir den Ausdruck

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} H dt$$

bilden, und zwar indem wir in der auseinandergesetzten Weise die Koordinaten, die Energie und die Zeit variieren. Zu dem Ende denken wir uns alle in H vorkommenden Gröfsen als Funktionen einer Hülfsvariablen u, ersetzen dementsprechend dt durch $\dot{t}du$ und entwickeln dann

$$\delta \int_{u_0}^{u_1} (H\dot{t}) du$$

in der üblichen Weise, d. h. wir variieren alle Gröfsen mit Ausnahme der unabhängigen Variablen u. Wir können daher unter dem Integrale variieren:

$$\delta \int_{u_0}^{u_1} (H\dot{t}) du = \int_{u_0}^{u_1} \delta(H\dot{t}) du.$$

Dieser Ausdruck ist von Königsberger[1]) für $\nu = 2$ entwickelt und zur Grundlage für die Ableitung des Aktionsprincips gemacht worden, allerdings für den Fall, dafs H explicite von t unabhängig ist, indem dort das Prinzip der lebendigen Kraft vorausgesetzt wird, und auch ohne die Abhängigkeit des kinetischen Potentials von der Energie E besonders hervorzuheben. Wir entwickeln ihn zunächst für $\nu = 3$ und beweisen dann die Allgemeingültigkeit der Formel von $\nu - 1$ auf ν. Bei der Entwicklung von δH ist zu beachten, dafs, wie aus (2) ersichtlich ist, die in H vorkommenden Gröfsen $p_s', \cdots, p_s^{(\nu)}$ die Ableitungen $\dot{t}, \ddot{t}, \cdots, \overset{\nu}{t}$ enthalten, welche bei der Variation der Zeit beachtet werden müssen.

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} H dt = \int_{u_0}^{u_1} \delta(H\dot{t}) du$$
$$= \int_{u_0}^{u_1} du \left\{\frac{\partial(H\dot{t})}{\partial t}\delta t + \frac{\partial(H\dot{t})}{\partial E}\delta E + \frac{\partial(H\dot{t})}{\partial \dot{t}}\delta \dot{t} + \frac{\partial(H\dot{t})}{\partial \ddot{t}}\delta \ddot{t} + \frac{\partial(H\dot{t})}{\partial \dddot{t}}\delta \dddot{t}\right.$$
$$\left. + \sum_1^n \left[\frac{\partial(H\dot{t})}{\partial p_s}\delta p_s + \frac{\partial(H\dot{t})}{\partial \dot{p}_s}\delta \dot{p}_s + \frac{\partial(H\dot{t})}{\partial \ddot{p}_s}\delta \ddot{p}_s + \frac{\partial(H\dot{t})}{\partial \dddot{p}_s}\delta \dddot{p}_s\right]\right\}. \tag{17}$$

Nun ist:

$$\int_{u_0}^{u_1} \frac{\partial(H\dot{t})}{\partial \dot{t}}\delta \dot{t}\, du = \int_{u_0}^{u_1} \frac{\partial(H\dot{t})}{\partial \dot{t}}\frac{d(\delta t)}{du} du = \left[\frac{\partial(H\dot{t})}{\partial \dot{t}}\delta t\right]_{u_0}^{u_1} - \int_{u_0}^{u_1} du\cdot\delta t\cdot\frac{d}{du}\left(\frac{\partial(H\dot{t})}{\partial \dot{t}}\right)$$

$$\int_{u_0}^{u_1} \frac{\partial(H\dot{t})}{\partial \ddot{t}}\delta \ddot{t}\, du = \left[\frac{\partial(H\dot{t})}{\partial \ddot{t}}\delta \dot{t}\right]_{u_0}^{u_1} - \int_{u_0}^{u_1} du\cdot\delta \dot{t}\cdot\frac{d}{du}\left(\frac{\partial(H\dot{t})}{\partial \ddot{t}}\right)$$
$$= \left[\frac{\partial(H\dot{t})}{\partial \ddot{t}}\delta \dot{t}\right]_{u_0}^{u_1} - \left[\frac{d}{du}\left(\frac{\partial(H\dot{t})}{\partial \ddot{t}}\right)\delta t\right]_{u_0}^{u_1} + \int_{u_0}^{u_1} du\cdot\delta t\cdot\frac{d^2}{du^2}\left(\frac{\partial(H\dot{t})}{\partial \ddot{t}}\right)$$

$$\int_{u_0}^{u_1} \frac{\partial(H\dot{t})}{\partial \dddot{t}}\delta \dddot{t}\, du = \left[\frac{\partial(H\dot{t})}{\partial \dddot{t}}\delta \ddot{t} - \frac{d}{du}\left(\frac{\partial(H\dot{t})}{\partial \dddot{t}}\right)\delta \dot{t}\right]_{u_0}^{u_1} + \left[\frac{d^2}{du^2}\left(\frac{\partial(H\dot{t})}{\partial \dddot{t}}\right)\delta t\right]_{u_0}^{u_1}$$
$$- \int_{u_0}^{u_1} du\cdot\delta t\cdot\frac{d^3}{du^3}\left(\frac{\partial(H\dot{t})}{\partial \dddot{t}}\right)$$

1) l. c. p. 409.

und ebenso:

$$\int_{u_0}^{u_1}\frac{\partial(H\dot t)}{\partial \dot p_s}\delta p_s\,du=\left[\frac{\partial(H\dot t)}{\partial \dot p_s}\delta p_s\right]_{u_0}^{u_1}-\int_{u_0}^{u_1}du\cdot\delta p_s\cdot\frac{d}{du}\left(\frac{\partial(H\dot t)}{\partial \dot p_s}\right)$$

$$\int_{u_0}^{u_1}\frac{\partial(H\dot t)}{\partial \ddot p_s}\delta \dot p_s\,du=\left[\frac{\partial(H\dot t)}{\partial \ddot p_s}\delta \dot p_s\right]_{u_0}^{u_1}-\left[\frac{d}{du}\left(\frac{\partial(H\dot t)}{\partial \ddot p_s}\right)\delta p_s\right]_{u_0}^{u_1}+\int_{u_0}^{u_1}du\cdot\delta p_s\cdot\frac{d^2}{du^2}\left(\frac{\partial(H\dot t)}{\partial \ddot p_s}\right)$$

$$\int_{u_0}^{u_1}\frac{\partial(H\dot t)}{\partial \dddot p_s}\delta \ddot p_s\,du=\left[\frac{\partial(H\dot t)}{\partial \dddot p_s}\delta \ddot p_s-\frac{d}{du}\left(\frac{\partial(H\dot t)}{\partial \dddot p_s}\right)\cdot\delta p_s\right]_{u_0}^{u_1}+\left[\frac{d^2}{du^2}\left(\frac{\partial(H\dot t)}{\partial \dddot p_s}\right)\cdot\delta p_s\right]_{u_0}^{u_1}-\int_{u_0}^{u_1}du\cdot\delta p_s\cdot\frac{d^3}{du^3}\left(\frac{\partial(H\dot t)}{\partial \dddot p_s}\right).$$

Diese Beziehungen wollen wir für die Umformung von (17) verwenden. Aufserdem sondern wir von δE die Variation nach der Zeit, also das Produkt von δt und dem totalen Differentialquotienten von E nach t, ab. Dann geht (17) über in:

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}H dt=\int_{u_0}^{u_1}du\left\{\frac{\partial(H\dot t)}{\partial E}\delta E+\delta t\left[\frac{\partial(H\dot t)}{\partial E}\frac{dE}{dt}+\frac{\partial(H\dot t)}{\partial t}-\frac{d}{du}\left(\frac{\partial(H\dot t)}{\partial \dot t}\right)+\frac{d^2}{du^2}\left(\frac{\partial(H\dot t)}{\partial \ddot t}\right)-\frac{d^3}{du^3}\left(\frac{\partial(H\dot t)}{\partial \dddot t}\right)\right]\right\}$$

$$+\int_{u_0}^{u_1}du\sum_1^n{}_s\left\{\frac{\partial(H\dot t)}{\partial p_s}-\frac{d}{du}\left(\frac{\partial(H\dot t)}{\partial \dot p_s}\right)+\frac{d^2}{du^2}\left(\frac{\partial(H\dot t)}{\partial \ddot p_s}\right)-\frac{d^3}{du^3}\left(\frac{\partial(H\dot t)}{\partial \dddot p_s}\right)\right\}\delta p_s$$

$$+\left[\delta t\left\{\frac{\partial(H\dot t)}{\partial \dot t}-\frac{d}{du}\left(\frac{\partial(H\dot t)}{\partial \ddot t}\right)+\frac{d^2}{du^2}\left(\frac{\partial(H\dot t)}{\partial \dddot t}\right)\right\}+\delta \dot t\left\{\cdots\right\}+\delta\ddot t\left\{\cdots\right\}\right]_{u_0}^{u_1}$$

$$+\sum_1^n{}_s\left\{\delta p_s\left[\frac{\partial(H\dot t)}{\partial \dot p_s}-\frac{d}{du}\left(\frac{\partial(H\dot t)}{\partial \ddot p_s}\right)+\frac{d^2}{du^2}\left(\frac{\partial(H\dot t)}{\partial \dddot p_s}\right)\right]+\delta\dot p_s\left[\frac{\partial(H\dot t)}{\partial \ddot p_s}-\frac{d}{du}\left(\frac{\partial(H\dot t)}{\partial \dddot p_s}\right)\right]+\delta\ddot p_s\left[\frac{\partial(H\dot t)}{\partial \dddot p_s}\right]\right\}_{u_0}^{u_1}$$

$$=\int_{u_0}^{u_1}du\left\{\dot t\frac{\partial H}{\partial E}\delta E+\delta t\left[\dot t\frac{\partial H}{\partial E}\frac{dE}{dt}+\dot t\frac{\partial H}{\partial t}-\frac{dH}{du}-\frac{d}{du}\left(\dot t\frac{\partial H}{\partial \dot t}\right)+\frac{d^2}{du^2}\left(\dot t\frac{\partial H}{\partial \ddot t}\right)-\frac{d^3}{du^3}\left(\dot t\frac{\partial H}{\partial \dddot t}\right)\right]\right\}$$

$$(18)\quad+\int_{u_0}^{u_1}du\sum_1^n{}_s\left\{\dot t\frac{\partial H}{\partial p_s}-\frac{d}{du}\left(\dot t\frac{\partial H}{\partial \dot p_s}\right)+\frac{d^2}{du^2}\left(\dot t\frac{\partial H}{\partial \ddot p_s}\right)-\frac{d^3}{du^3}\left(\dot t\frac{\partial H}{\partial \dddot p_s}\right)\right\}\delta p_s$$

$$+\left[\delta t\left\{H+\dot t\frac{\partial H}{\partial \dot t}-\frac{d}{du}\left(\dot t\frac{\partial H}{\partial \ddot t}\right)+\frac{d^2}{du^2}\left(\dot t\frac{\partial H}{\partial \dddot t}\right)\right\}+\delta\dot t\left\{\cdots\right\}+\delta\ddot t\left\{\cdots\right\}\right]_{u_0}^{u_1}$$

$$+\sum_1^n{}_s\left\{\delta p_s\left[\dot t\frac{\partial H}{\partial p_s}-\frac{d}{du}\left(\dot t\frac{\partial H}{\partial \dot p_s}\right)+\frac{d^2}{du^2}\left(\dot t\frac{\partial H}{\partial \ddot p_s}\right)\right]+\delta\dot p_s\left[\dot t\frac{\partial H}{\partial \dot p_s}-\frac{d}{du}\left(\dot t\frac{\partial H}{\partial \ddot p_s}\right)\right]+\delta\ddot p_s\,\dot t\frac{\partial H}{\partial \dddot p_s}\right\}_{u_0}^{u_1}.$$

Darin enthält δE nichts mehr von δt, da wir das Glied $\frac{dE}{dt}\delta t$ abgesondert haben. Wir können (18) mit Hülfe von (2) weiter entwickeln, indem aus diesen Gleichungen sich folgende Beziehungen ergeben:

$$\frac{\partial H}{\partial \dot t}=\sum_1^n{}_s\left\{\frac{\partial H}{\partial p_s'}\frac{\partial p_s'}{\partial \dot t}+\frac{\partial H}{\partial p_s''}\frac{\partial p_s''}{\partial \dot t}+\frac{\partial H}{\partial p_s'''}\frac{\partial p_s'''}{\partial \dot t}\right\}$$

$$=-\sum_1^n{}_s\left\{\frac{\dot p_s}{\dot t^2}\frac{\partial H}{\partial p_s'}+\left[2\frac{\ddot p_s}{\dot t^3}-3\frac{\dot p_s\ddot t}{\dot t^4}\right]\frac{\partial H}{\partial p_s''}+\left[3\frac{\dddot p_s}{\dot t^4}-12\frac{\ddot p_s\ddot t}{\dot t^5}-4\frac{\dot p_s\dddot t}{\dot t^5}+15\frac{\dot p_s\ddot t^2}{\dot t^6}\right]\frac{\partial H}{\partial p_s'''}\right\}$$

$$\frac{\partial H}{\partial \ddot t}=\sum_1^n{}_s\left\{\frac{\partial H}{\partial p_s''}\frac{\partial p_s''}{\partial \ddot t}+\frac{\partial H}{\partial p_s'''}\frac{\partial p_s'''}{\partial \ddot t}\right\}$$

$$=-\sum_1^n{}_s\left\{\frac{\dot p_s}{\dot t^3}\frac{\partial H}{\partial p_s''}+3\left[\frac{\ddot p_s}{\dot t^4}-2\frac{\dot p_s\ddot t}{\dot t^5}\right]\frac{\partial H}{\partial p_s'''}\right\}$$

$$\frac{\partial H}{\partial \dddot t}=\sum_1^n{}_s\frac{\partial H}{\partial p_s'''}\frac{\partial p_s'''}{\partial \dddot t}=-\sum_1^n{}_s\frac{\dot p_s}{\dot t^4}\frac{\partial H}{\partial p_s''}$$

und ebenso:

$$\frac{\partial H}{\partial \dot{p}_s} = \frac{\partial H}{\partial p_s'}\frac{\partial p_s'}{\partial \dot{p}_s} + \frac{\partial H}{\partial p_s''}\frac{\partial p_s''}{\partial \dot{p}_s} + \frac{\partial H}{\partial p_s'''}\frac{\partial p_s'''}{\partial \dot{p}_s}$$

$$= \frac{1}{\dot{t}}\frac{\partial H}{\partial p_s'} - \frac{\ddot{t}}{\dot{t}^3}\frac{\partial H}{\partial p_s''} - \left[\frac{\dddot{t}}{\dot{t}^4} - 3\frac{\ddot{t}^2}{\dot{t}^5}\right]\frac{\partial H}{\partial p_s'''}$$

$$\frac{\partial H}{\partial \ddot{p}_s} = \frac{\partial H}{\partial p_s''}\frac{\partial p_s''}{\partial \ddot{p}_s} + \frac{\partial H}{\partial p_s'''}\frac{\partial p_s'''}{\partial \ddot{p}_s} = \frac{1}{\dot{t}^2}\frac{\partial H}{\partial p_s''} - 3\frac{\ddot{t}}{\dot{t}^4}\frac{\partial H}{\partial p_s'''}$$

$$\frac{\partial H}{\partial \dddot{p}_s} = \frac{\partial H}{\partial p_s'''}\frac{\partial p_s'''}{\partial \dddot{p}_s} = \frac{1}{\dot{t}^3}\frac{\partial H}{\partial p_s'''}.$$

Ferner ist:

$$\delta \dot{p}_s = \frac{d(\delta p_s)}{du} = \dot{t}\,\delta p_s'; \qquad \delta \ddot{p}_s = \frac{d(\delta \dot{p}_s)}{du} = \ddot{t}\delta p_s' + \dot{t}^2 \delta p_s'';$$

$$\delta \dddot{p}_s = \dddot{t}\delta p_s' + 3\,\dot{t}\ddot{t}\,\delta p_s'' + \dot{t}^3 \delta p_s'''.$$

Infolgedessen geht (18) über in:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} H\,dt = \int_{u_0}^{u_1} du \left\{ \delta t \left[\dot{t}\frac{\partial H}{\partial E}\frac{\partial E}{\partial t} + \dot{t}\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{d}{du}\sum_1^n{}_s \left\{ \frac{\dot{p}_s}{\dot{t}}\frac{\partial H}{\partial p_s'} \right.\right.\right.$$

$$+ \left[2\frac{\ddot{p}_s}{\dot{t}^3} - 3\frac{\dot{p}_s\ddot{t}}{\dot{t}^4} \right]\frac{\partial H}{\partial p_s'} + \left[3\frac{\ddot{p}_s}{\dot{t}^4} - 12\frac{\ddot{p}_s\ddot{t}}{\dot{t}^5} - 4\frac{\dot{p}_s\dddot{t}}{\dot{t}^5} + 15\frac{\dot{p}_s\ddot{t}^2}{\dot{t}^6} \right]\frac{\partial H}{\partial p_s'''} \Big\}$$

$$- \frac{d^2}{du^2}\sum_1^n{}_s \left\{ \frac{\dot{p}_s}{\dot{t}^2}\frac{\partial H}{\partial p_s''} + 3\frac{\dot{p}_s\dot{t} - 2\dot{p}_s\ddot{t}}{\dot{t}^4}\frac{\partial H}{\partial p_s'''} \right\} + \frac{d^3}{du^3}\sum_1^n{}_s \frac{\dot{p}_s}{\dot{t}^3}\frac{\partial H}{\partial p_s'''} \Big] + \dot{t}\frac{\partial H}{\partial E}\delta E \Big\}$$

$$+ \int_{u_0}^{u_1} du \sum_1^n{}_s \delta p_s \left\{ \dot{t}\frac{\partial H}{\partial p_s} - \frac{d}{du}\left[\frac{\partial H}{\partial p_s'} - \frac{\ddot{t}}{\dot{t}^2}\frac{\partial H}{\partial p_s''} - \left(\frac{\dddot{t}}{\dot{t}^3} - 3\frac{\ddot{t}^2}{\dot{t}^4} \right)\frac{\partial H}{\partial p_s'''} \right] \right.$$

$$\left. + \frac{d^2}{du^2}\left[\frac{1}{\dot{t}}\frac{\partial H}{\partial p_s'} - 3\frac{\ddot{t}}{\dot{t}^3}\frac{\partial H}{\partial p_s'''} \right] - \frac{d^3}{du^3}\left[\frac{1}{\dot{t}^2}\frac{\partial H}{\partial p_s'''} \right] \right\}$$

$$+ \left[\delta t \left\{ H - \sum_1^n{}_s \left[\frac{\dot{p}_s}{\dot{t}}\frac{\partial H}{\partial p_s} + \left(2\frac{\ddot{p}_s}{\dot{t}^2} - 3\frac{\dot{p}_s\ddot{t}}{\dot{t}^3} \right)\frac{\partial H}{\partial p_s'} \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + \left(3\frac{\dddot{p}_s}{\dot{t}^3} - 12\frac{\ddot{p}_s\ddot{t}}{\dot{t}^4} - 4\frac{\dot{p}_s\dddot{t}}{\dot{t}^4} + 15\frac{\dot{p}_s\ddot{t}^2}{\dot{t}^5} \right)\frac{\partial H}{\partial p_s'''} \right] \right.\right.$$

$$\left. - \frac{d}{du}\left(\frac{\dot{p}_s}{\dot{t}^2}\frac{\partial H}{\partial p_s''} + 3\frac{\dot{p}_s\dot{t} - 2\dot{p}_s\ddot{t}}{\dot{t}^4}\frac{\partial H}{\partial p_s'''} \right) + \frac{d^2}{du^2}\left(\frac{\dot{p}_s}{\dot{t}^3}\frac{\partial H}{\partial p_s'''} \right) \right] \Big\}$$

$$+ \delta \dot{t}\left\{ \cdots \right\} + \delta \ddot{t}\left\{ \cdots \right\} \Big]_{u_0}^{u_1}$$

$$+ \sum_1^n{}_s \left\{ \delta p_s \left[\frac{\partial H}{\partial p_s'} - \frac{1}{\dot{t}}\frac{d}{du}\left(\frac{\partial H}{\partial p_s''} \right) - \left(\frac{\ddot{t}}{\dot{t}^3} - \frac{1}{\dot{t}^2} \right)\frac{d^2}{du^2}\left(\frac{\partial H}{\partial p_s'''} \right) \right] \right.$$

$$\left. + \delta p_s' \left[\frac{\partial H}{\partial p_s''} - \frac{1}{\dot{t}}\frac{d}{du}\left(\frac{\partial H}{\partial p_s'''} \right) \right] + \delta p_s'' \frac{\partial H}{\partial p_s'''} \right\}_{u_0}^{u_1}.$$

Führt man die hierin vorkommenden Differentiationen regelrecht aus, so gelangt man nach einiger Umformung zur folgenden Gleichung:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} H dt = \int_{u_0}^{u_1} du \left\{ \left[\dot{t}\frac{\partial H}{\partial E}\frac{dE}{dt} + \dot{t}\frac{\partial H}{\partial t} - \frac{dH}{du} \right.\right.$$

$$+ \frac{d}{du}\sum_1^n{}_s \left\{ p_s' \left[\frac{\partial H}{\partial p_s'} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial p_s''} \right) + \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial H}{\partial p_s'''} \right) \right] \right.$$

$$\left.\left. + p_s'' \left[\frac{\partial H}{\partial p_s''} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial p_s'''} \right) \right] + p_s''' \cdot \frac{\partial H}{\partial p_s'''} \right\} \Big] \delta t + \dot{t}\frac{\partial H}{\partial E}\delta E \Big\}$$

$$+ \int_{u_0}^{u_1} du \cdot \dot{t} \sum_1^n{}_s \left\{ \frac{\partial H}{\partial p_s} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial p_s'} \right) + \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial H}{\partial p_s''} \right) - \frac{d^3}{dt^3}\left(\frac{\partial H}{\partial p_s'''} \right) \right\} \delta p_s$$

$$+ \left[\delta t \left\{ H - \sum_1^n{}_s \left[p_s' \left(\frac{\partial H}{\partial p_s} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial p_s'} \right) + \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial H}{\partial p_s'''} \right) \right) \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + p_s''\left(\frac{\partial H}{\partial p_s''} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial p_s''} \right) \right) + p_s'' \frac{\partial H}{\partial p_s'''} \right] \right\}$$

$$+ \delta \dot{t}\left\{ \cdots \right\} + \delta \ddot{t}\left\{ \cdots \right\} \Big]_{u_0}^{u_1}$$

$$+ \sum_1^n{}_s \left\{ \delta p_s \left[\frac{\partial H}{\partial p_s'} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial p_s''} \right) + \frac{d^2}{du^2}\left(\frac{\partial H}{\partial p_s'''} \right) \right] \right.$$

$$\left. + \delta p_s' \left[\frac{\partial H}{\partial p_s''} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial p_s'''} \right) \right] + \delta p_s'' \frac{\partial H}{\partial p_s'''} \right\}_{u_0}^{u_1}.$$

Hier können wir uns aber wieder von der Hülfsvariablen u frei machen, denn unter den Integralen enthalten alle Posten den Faktor $t\,du$, welcher durch dt ersetzt werden kann bei entsprechender Änderung der Integrationsgrenzen von u_0, u_1 in t_0, t_1 und wenn wir uns wieder die in H und E vorkommenden Gröfsen als Funktionen von t denken, was aber formal an den Ausdrücken nichts ändert. In den Grenzposten sind es wesentlich nur noch δt und $\delta \dot{t}$, welche den Zusammenhang mit u bilden. Wir wollen uns aber hier und im folgenden die Zeit stets als eine solche Funktion von u denken, dafs

$$\left[\delta t\right]_{t_0 t_1} = \left[\delta \dot{t}\right]_{t_0 t_1} = \cdots = 0$$

seien, was, mechanisch betrachtet, absolut keine Einschränkung des Problems bedeutet. Denn, während wir wohl eine mechanische Deutung für δt finden konnten, denken wir uns unter $\delta \dot{t}, \cdots$ rein gar nichts. Nach dieser Voraussetzung geht aber die letzte Gleichung über in:

$$\begin{aligned}
\delta \int_{t_0}^{t_1} H\,dt = \int_{t_0}^{t_1} dt \Bigg[& \left\{ \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial E}\frac{\partial E}{\partial t} - \frac{\partial H}{\partial t} \right. \\
& + \frac{d}{dt}\sum_1^n{}_s \left(p_s' \left[\frac{\partial H}{\partial p_s'} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial p_s''}\right) + \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial H}{\partial p_s'''}\right)\right] \right. \\
& \left. \left. + p_s'' \left[\frac{\partial H}{\partial p_s''} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial p_s'''}\right)\right] + p_s''' \frac{\partial H}{\partial p_s'''} \right) \right\} \delta t + \frac{\partial H}{\partial E}\delta E \Bigg] \\
& + \int_{t_0}^{t_1} dt \sum_1^n{}_s \left\{ \frac{\partial H}{\partial p_s} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial p_s'}\right) + \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial H}{\partial p_s''}\right) - \frac{d^3}{dt^3}\left(\frac{\partial H}{\partial p_s'''}\right) \right\} \delta p_s \\
(19) \qquad & + \left\{ \left[H - \sum_1^n{}_s \left(p_s' \left[\frac{\partial H}{\partial p_s'} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial p_s''}\right) + \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial H}{\partial p_s'''}\right)\right] \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + p_s'' \left[\frac{\partial H}{\partial p_s''} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial p_s'''}\right)\right] + p_s''' \frac{\partial H}{\partial p_s'''} \right) \right] \delta t \right\}_{u_0}^{u_1} \\
& + \sum_1^n{}_s \left\{ \delta p_s \left[\frac{\partial H}{\partial p_s'} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial p_s''}\right) + \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial H}{\partial p_s'''}\right)\right] \right. \\
& \left. + \delta p_s' \left[\frac{\partial H}{\partial p_s''} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial p_s'''}\right)\right] + \delta p_s'' \frac{\partial H}{\partial p_s'''} \right\}_{u_0}^{u_1}.
\end{aligned}$$

Diese Formel, deren Bildungsgesetz unmittelbar ersichtlich ist, und die von Königsberger für $\nu = 2$ und von uns nunmehr für $\nu = 3$ als richtig gefunden worden ist, wollen wir als richtig für $\nu - 1$ annehmen, um sie dann für ν, d. h. allgemein, zu beweisen. Zu dem Ende müssen wir zunächst nachsehen, was sich in

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} H dt$$

ändert, wenn H auch die ν^{ten} Ableitungen der Koordinaten enthält. Da ist es zunächst der Posten

$$\int_{u_0}^{u_1} du \left\{ \frac{\partial (H\dot{t})}{\partial \overset{\nu}{t}} \delta \overset{\nu}{t} + \sum_1^n{}_s \frac{\partial (H\dot{t})}{\partial \overset{\nu}{p}_s} \delta \overset{\nu}{p}_s \right\},$$

welcher zu (17) hinzutritt, und welcher, in derselben Weise wie die anderen Posten jener Gleichung entwickelt, bei Vernachlässigung der $\delta \overset{\varkappa}{t}$ in den Grenzposten folgendes liefert:

$$\begin{aligned}
& (-1)^\nu \int_{u_0}^{u_1} du \cdot \delta t \cdot \frac{d^\nu}{du^\nu}\left(\frac{\partial (H\dot{t})}{\partial \overset{\nu}{t}}\right) + (-1)^\nu \int_{u_0}^{u_1} du \sum_1^n{}_s \delta p_s \cdot \frac{d^\nu}{du^\nu}\left(\frac{\partial (H\dot{t})}{\partial \overset{\nu}{p}_s}\right) \\
(20) \quad & + \sum_1^n{}_s \left\{ \frac{\partial (H\dot{t})}{\partial \overset{\nu}{p}_s} \delta \overset{\nu-1}{p}_s - \frac{d}{du}\left(\frac{\partial (H\dot{t})}{\partial \overset{\nu}{p}_s}\right) \delta \overset{\nu-2}{p}_s + \cdots + (-1)^{\nu-1} \frac{d^{\nu-1}}{du^{\nu-1}}\left(\frac{\partial (H\dot{t})}{\partial \overset{\nu}{p}_s}\right) \delta p_s \right\}_{u_0}^{u_1} \\
& + \left\{ \delta t \cdot (-1)^{\nu-1} \cdot \frac{d^{\nu-1}}{du^{\nu-1}}\left(\frac{\partial (H\dot{t})}{\partial \overset{\nu}{t}}\right) \right\}_{u_0}^{u_1}.
\end{aligned}$$

Bei der Entwicklung, welche (17) in (18) überführt, treten gleichfalls neue Posten hinzu, indem z. B. bei $\frac{\partial H}{\partial \overset{\varkappa}{t}}$ zu dem Ausdrucke

$$\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\varkappa)}} \frac{\partial \overset{\varkappa}{p_s^{(\varkappa)}}}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial p_s^{(\varkappa+1)}} \frac{\partial \overset{\varkappa}{p_s^{(\varkappa+1)}}}{\partial t} + \cdots + \frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu-1)}} \frac{\partial \overset{\varkappa}{p_s^{(\nu-1)}}}{\partial t}$$

noch das Glied

$$\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}} \frac{\partial \overset{\varkappa}{p_s^{(\nu)}}}{\partial t}$$

hinzukommt. Man sieht leicht ein, dafs sämmtliche auf diese Weise, d. h. durch

$$\left(\frac{\partial H}{\partial \overset{\varkappa}{t}}\right)_{\varkappa=1,2,\cdots,\nu-1} \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial H}{\partial \overset{\lambda}{p}_s}\right)_{\lambda=1,2,\cdots,\nu-1}$$

entstehenden Posten mitsamt (20) folgendes liefern:

$$\int_{u_0}^{u_1} du\cdot\delta t\cdot\sum_1^n{}_s\left\{-\frac{d}{du}\left(\dot t\,\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}}\frac{\partial p_s^{(\nu)}}{\partial \dot t}\right)+\frac{d^2}{du^2}\left(\dot t\,\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}}\frac{\partial p_s^{(\nu)}}{\partial \ddot t}\right)\right.$$
$$\left.-\cdots+(-1)^\nu\frac{d^\nu}{du^\nu}\left(\dot t\,\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}}\frac{\partial p_s^{(\nu)}}{\partial \overset{\nu}{t}}\right)\right\}$$
$$+\int_{u_0}^{u_1} du\sum_1^n{}_s\,\delta p_s\left\{-\frac{d}{du}\left(\dot t\,\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}}\frac{\partial p_s^{(\nu)}}{\partial p_s}\right)+\frac{d^2}{du^2}\left(\dot t\,\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}}\frac{\partial p_s^{(\nu)}}{\partial \dot p_s}\right)\right.$$
$$\left.-\cdots+(-1)^\nu\frac{d^\nu}{du^\nu}\left(\dot t\,\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}}\frac{\partial p_s^{(\nu)}}{\partial \overset{\nu}{p}_s}\right)\right\}$$
$$+\left\{\delta t\sum_1^n{}_s\left[\dot t\,\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}}\frac{\partial p_s^{(\nu)}}{\partial \dot t}-\frac{d}{du}\left(\dot t\,\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}}\frac{\partial p_s^{(\nu)}}{\partial \ddot t}\right)+\cdots\right.\right.$$
$$\left.\left.+(-1)^{\nu-1}\frac{d^{\nu-1}}{du^{\nu-1}}\left(\dot t\,\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}}\frac{\partial p_s^{(\nu)}}{\partial \overset{\nu}{t}}\right)\right]\right\}_{u_0}^{u_1} \tag{21}$$
$$+\sum_1^n{}_s\left\{\delta p_s\left[\dot t\,\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}}\frac{\partial p_s^{(\nu)}}{\partial \dot p_s}-\frac{d}{du}\left(\dot t\,\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}}\frac{\partial p_s^{(\nu)}}{\partial \ddot p_s}\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.+\cdots+(-1)^{\nu-1}\frac{d^{\nu-1}}{du^{\nu-1}}\left(\dot t\,\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}}\frac{\partial p_s^{(\nu)}}{\partial \overset{\nu}{p}_s}\right)\right]\right.$$
$$+\delta\dot p_s\left[\dot t\,\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}}\frac{\partial p_s^{(\nu)}}{\partial \ddot p_s}-\frac{d}{du}\left(\dot t\,\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}}\frac{\partial p_s^{(\nu)}}{\partial \dddot p_s}\right)\right.$$
$$\left.+\cdots+(-1)^{\nu-2}\frac{d^{\nu-2}}{du^{\nu-2}}\left(\dot t\,\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}}\frac{\partial p_s^{(\nu)}}{\partial \overset{\nu}{p}_s}\right)\right]$$
$$+\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\left.+\delta\overset{\nu-1}{p}_s\cdot\dot t\,\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}}\frac{\partial p_s^{(\nu)}}{\partial \overset{\nu}{p}_s}\right\}_{u_0}^{u_1}.$$

Die Glieder von $\delta\dot p_s$ ab im letzten Grenzposten können wir in einen einzigen symbolischen Ausdruck zusammenfassen als

$$\sum_1^{\nu-1}{}_\varkappa\,\delta\overset{\varkappa}{p}_s\sum_{\varkappa+1}^{\nu}{}^{\lambda}(-1)^{\lambda-\varkappa-1}\frac{d^{\lambda-\varkappa-1}}{du^{\lambda-\varkappa-1}}\left(\dot t\,\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}}\frac{\partial p_s^{(\nu)}}{\partial \overset{\lambda}{p}_s}\right). \tag{22}$$

Führen wir hierin für $\delta\overset{\varkappa}{p}_s$ seinen Wert nach (1ª) ein und ordnen die Glieder nach den $\delta p_s^{(\mu)}$, wobei zu beachten ist, dafs $\delta p_s^{(\mu)}$ von den Gliedern $\delta\overset{\mu}{p}_s$, $\delta\overset{\mu+1}{p}_s,\cdots$, nicht aber von denen bis zu $\delta\overset{\mu-1}{p}_s$ herrührt, so finden wir als Koeffizienten von $\delta p_s^{(\mu)}$:

$$\sum_\mu^{\nu-1}{}_\varkappa\frac{1}{\mu!}\sum_{\Sigma\psi=\varkappa}^{\psi_1,\psi_\mu\geq 1}\frac{\varkappa!}{\psi_1!\cdots\psi_\mu!}\overset{\psi_1}{\dot t}\cdots\overset{\psi_\mu}{\dot t}\sum_{\varkappa+1}^{\nu}{}^{\lambda}(-1)^{\lambda-\varkappa-1}\frac{d^{\lambda-\varkappa-1}}{du^{\lambda-\varkappa-1}}\left(\dot t\,\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}}\frac{\partial p_s^{(\nu)}}{\partial \overset{\lambda}{p}_s}\right)$$

oder mit Rücksicht auf (5):

$$(-1)^{\nu-\mu-1}\frac{d^{\nu-\mu-1}}{dt^{\nu-\mu-1}}\left(\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}}\right).$$

Deswegen und wegen der Beziehungen (3), (3ª), (4) und (4ᵇ) nimmt (21), wenn man darin $\dot t du$ durch dt und entsprechend die Grenzen u_0 und u_1 durch t_0 und t_1 ersetzt, folgende Form an:

$$\int_{t_0}^{t_1} dt\cdot\delta t\sum_1^n{}_s\frac{d}{dt}\left\{p_s^{(\nu)}\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}}-p_s^{(\nu-1)}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}}\right)+\cdots\right.$$
$$\left.+(-1)^{\nu-1}p_s'\frac{d^{\nu-1}}{dt^{\nu-1}}\left(\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}}\right)\right\}+\int_{t_0}^{t_1} dt\sum_1^n{}_s(-1)^\nu\frac{d^\nu}{dt^\nu}\left(\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}}\right)\delta p_s$$
$$+\left\{\delta t\sum_1^n{}_s\left[-p_s^{(\nu)}\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}}+p_s^{(\nu-1)}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}}\right)-\cdots\right.\right.$$
$$\left.\left.+(-1)^\nu p_s'\frac{d^{\nu-1}}{dt^{\nu-1}}\left(\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}}\right)\right]\right\}_{t_0}^{t_1}$$
$$+\sum_1^n{}_s\left\{\delta p_s\cdot(-1)^{\nu-1}\cdot\frac{d^{\nu-1}}{dt^{\nu-1}}\left(\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}}\right)+\delta p_s'\cdot(-1)^{\nu-2}\frac{d^{\nu-2}}{dt^{\nu-2}}\left(\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}}\right)\right.$$
$$\left.+\cdots+\delta p_s^{(\nu-1)}\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}}\right\}_{t_0}^{t_1}.$$

Dieses ist nun der Posten, welcher zu $\delta\int_{t_0}^{t_1} H dt$ hinzutritt, wenn H nicht nur die Ableitungen bis zu den $(\nu-1)^{\text{ten}}$, sondern auch noch die ν^{ten} enthält. Vergegenwärtigt man sich aber die Gleichung (19) für $\nu-1$ statt der dortigen drei Ableitungen — und für diesen Fall haben wir sie ja als gültig vorausgesetzt — und addiert den vorstehenden Posten hinzu, so erhält man den Ausdruck der Variation für den Fall von ν Ableitungen in folgender Form:

$$\delta\int_{t_0}^{t_1} H\,dt = \int_{t_0}^{t_1} dt\left\{\delta t\left[\frac{\partial H}{\partial t}+\frac{\partial H}{\partial E}\frac{dE}{dt}-\frac{dH}{dt}+\frac{d\Sigma}{dt}\right]+\delta E\cdot\frac{\partial H}{\partial E}\right\}$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\sum_1^n{}^s L_s\,\delta p_s\,dt \tag{23}$$

$$+\sum_1^n{}^s\left\{H_1\,\delta p_s+H_2\,\delta p_s'+\cdots+H_\nu\,\delta p_s^{(\nu-1)}\right\}_{t_0}^{t_1}+\Big[\big(H-\Sigma\big)\,\delta t\Big]_{t_0}^{t_1},$$

worin folgende Abkürzungen eingeführt sind:

$$H_\varkappa \equiv \frac{\partial H}{\partial p_s^{(\varkappa)}}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\varkappa+1)}}\right)+\cdots+(-1)^{\nu-\varkappa}\frac{d^{\nu-\varkappa}}{dt^{\nu-\varkappa}}\left(\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}}\right) \tag{24}$$

$$\Sigma \equiv \sum_1^n{}^s\left\{p_s' H_1+p_s'' H_2+\cdots+p_s^{(\nu)} H_\nu\right\} \tag{25}$$

$$L_s \equiv \frac{\partial H}{\partial p_s}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial p_s'}\right)+\cdots+(-1)^\nu\frac{d^\nu}{dt^\nu}\left(\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}}\right). \tag{26}$$

Die Zusammensetzung der Gleichung (23) ist nun genau die gleiche wie die von (19), deren Gültigkeit wir für $\nu-1$ vorausgesetzt hatten, also gilt (23) allgemein. Wir wollen sie aber noch etwas umformen:

Es ist nämlich:

$$\frac{dH}{dt}=\frac{\partial H}{\partial t}+\frac{\partial H}{\partial E}\frac{dE}{dt}+\sum_1^n{}^s\left\{\frac{\partial H}{\partial p_s}p_s'+\frac{\partial H}{\partial p_s'}p_s''+\cdots+\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}}p_s^{(\nu+1)}\right\}$$

also:

$$\frac{\partial H}{\partial t}+\frac{\partial H}{\partial E}\frac{dE}{dt}+\frac{d\Sigma}{dt}-\frac{dH}{dt}$$

$$=-\sum_1^n{}^s\left\{\frac{\partial H}{\partial p_s}p_s'+\frac{\partial H}{\partial p_s'}p_s''+\cdots+\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}}p_s^{(\nu+1)}\right\}+\frac{d\Sigma}{dt}$$

$$=-\sum_1^n{}^s\left\{\frac{\partial H}{\partial p_s}p_s'+\frac{\partial H}{\partial p_s'}p_s''+\cdots+\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}}p_s^{(\nu+1)}\right\}$$

$$+\sum_1^n{}^s\left\{p_s'' H_1+p_s''' H_2+\cdots+p_s^{(\nu+1)}H_\nu+p_s'\frac{dH_1}{dt}+\cdots+p_s^{(\nu)}\frac{dH_\nu}{dt}\right\}$$

Aber aus der Definitionsgleichung (24) folgt:

$$H_\nu+\frac{dH_{\varkappa+1}}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\varkappa)}} \quad\text{und}\quad \frac{dH_1}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_s}-L_s,$$

also ist:

$$\frac{\partial H}{\partial t}+\frac{\partial H}{\partial E}\frac{dE}{dt}-\frac{dH}{dt}+\frac{d\Sigma}{dt}$$

$$=-\sum_1^n{}^s\left\{\frac{\partial H}{\partial p_s}p_s'+\frac{\partial H}{\partial p_s'}p_s''+\cdots+\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}}p_s^{(\nu+1)}\right\} \tag{27}$$

$$+\sum_1^n{}^s\left\{p_s'\frac{dH_1}{dt}+p_s''\frac{\partial H}{\partial p_s'}+\cdots+p_s^{(\nu+1)}\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}}\right\}$$

$$=-\sum_1^n{}^s L_s p_s'.$$

Ferner definieren wir

$$G \equiv \Sigma - E - H. \tag{28}$$

Wegen (27) und (28) können wir dann (23) in die folgende Form setzen:

$$\delta\int_{t_0}^{t_1} H dt=\int_{t_0}^{t_1} dt\left\{\frac{\partial H}{\partial E}\delta E-\delta t\sum_1^n{}^s L_s p_s'\right\}+\int_{t_0}^{t_1} L_s\,\delta p_s\,dt-\Big[(G+E)\,\delta t\Big]_{t_0}^{t_1}$$

$$+\sum_1^n{}^s\left\{H_1\,\delta p_s+H_2\,\delta p_s'+\cdots+H_\nu\,\delta p_s^{(\nu-1)}\right\}_{t_0}^{t_1}. \tag{29}$$

Aus dieser Gleichung wollen wir nun Folgerungen ziehen, welche nichts Anderes als die Variationsprinzipien sein werden.

§ 6.

Das Hamiltonsche Prinzip.

Wir erledigen zunächst die (Seite 6) erwähnten Spezialfälle, bei welchen die Zeit nicht variiert werden soll, und werden finden, dafs diese uns das Hamiltonsche Prinzip liefern, während, wie wir im nächsten Kapitel sehen werden, das Aktionsprinzip aus dem allgemeinen Falle, d. h. bei Einschlufs der Zeitvariation, folgt. Dadurch wird die (Seite 5) ausgesprochene Behauptung, dafs die Sonderung der beiden Prinzipien wesentlich auf Beachtung oder Vernachlässigung der Zeitvariation beruht, bestätigt sein.

Wir beginnen mit dem Spezialfalle (3), in welchem die Zeit und die Energie für unvariierbar erklärt werden, d. h. wir betrachten nur solche Bahnen, deren koordinierte Punkte zur selben Zeit und unter gleichem Energievorrat des Systems passiert werden. Wir setzen ferner feste Integrationsgrenzen voraus, und zwar nicht nur in Bezug auf die δp_s, sondern auch auf $\delta p_s'$, $\delta p_s''$, $\cdots$, $\delta p_s^{(\nu-1)}$. Unter diesen Bedingungen fragen wir nach derjenigen Bewegung, für welche

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} dt \left\{ H + \sum_1^n{}_s P_s p_s \right\}$$ [1])

verschwindet, wenn H unser kinetisches Potential und P_s die in der Richtung der Koordinate p_s wirkende äufsere Kraft ist. Es soll aber dabei vorausgesetzt werden, dafs die P_s reine Zeitfunktionen, dagegen unabhängig von den Koordinaten und ihren Ableitungen seien.

Es ist noch zu beachten, dafs wegen der gemachten Annahme, dafs δE und δt gleichzeitig Null seien, auch das δE in der Gleichung (29) verschwindet, wiewohl es nicht die Gesamtvariation der Energie ist, da wir den von der Zeitvariation herrührenden Teil $\frac{dE}{dt}\delta t$ abgesondert haben.

Mit Hülfe der Gleichung (29) finden wir nun unter den auseinandergesetzten Bedingungen:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} dt \left\{ H + \sum_1^n{}_s L_s p_s \right\} = \int_{t_0}^{t_1} dt \sum_1^n{}_s (L_s + P_s)\, \delta p_s ,$$

1) Vergl. Helmholtz, Wissensch. Abhandl. Bd. III p. 206 u. 213; auch Königsberger l. c. p. 905.

und da die p_s freie Koordinaten sein sollen, ergiebt sich

(a) $$L_s + P_s = 0 \quad \text{für} \quad s = 1, 2, \cdots, n,$$

d. h. die zweite Form der Lagrangeschen Bewegungsgleichungen[1]), als notwendige und hinreichende Bedingung für das Bestehen des Hamiltonschen Prinzips:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} dt \left\{ H + \sum_1^n{}_s P_s p_s \right\} = 0 .$$

Dagegen sind beim Spezialfall (1), d. h. wenn nur δt, nicht aber δE als Null angenommen wird, die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen zwar eine notwendige, aber keine hinreichende Bedingung für das Verschwinden der Variation. Notwendig und hinreichend sind in diesem Falle die Gleichungen

(b) $$L_s + P_s = 0 \quad \text{und gleichzeitig} \quad \frac{\partial H}{\partial E} = 0 ,$$ [2])

d. h. das kinetische Potential darf die Energie nicht explicite enthalten, wenn das Hamiltonsche Prinzip bestehen soll.

Wir brauchen da natürlich nicht von dem Falle zu sprechen, dafs die Energie eine reine Zeitfunktion ist, bei welchem also unser von δt freies δE verschwindet und infolgedessen die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen allein für das Verschwinden der Variation ausreichen, denn in diesem Falle ist die Variierbarkeit der Energie bei ausgeschlossener Variation der Zeit illusorisch und der Spezialfall (1) fällt mit dem bereits behandelten Fall (3) zusammen.

In einem Falle können wir jedoch zum Hamiltonschen Prinzip gelangen, ohne die Variation der Zeit auszuschliefsen, nämlich in demjenigen, in welchem keine äufseren Kräfte P_s existieren und aufserdem die Energie eine reine Zeitfunktion ist. Wir haben nur anzunehmen, dafs die Dauer der Bewegung unverändert bleibt, d. h. $[\delta t]_{t_0, t_1} = 0$. In diesem Falle ist die notwendige und hinreichende Bedingung für das Bestehen des Prinzips durch die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen gegeben:

(c) $$L_s = 0 .$$

1) Königsberger l. c. p. 905.

2) Réthy (l. c. p. 524) nennt eine solche Bewegung eine Lagrangesche erster Klasse.

§ 7.

Das Aktionsprinzip im Falle der lebendigen Kraft.

Um das Aktionsprinzip für kinetische Potentiale mit höheren Ableitungen der Koordinaten aufzustellen, müssen wir erst einen Ausdruck für die Aktion definieren. In der gewöhnlichen Mechanik schreibt man das Aktionsprinzip nach Lagrange in folgenden beiden Formen:

$$\delta\int_{t_0}^{t_1} 2T\,dt = 0 \quad \text{und} \quad \delta\int_{t_0}^{t_1}\sum_i m_i v_i\,ds = \delta\int_{t_0}^{t_1}\sum_i m_i v_i^2\,dt = 0.$$

Diese beiden Ausdrücke sind in der gewöhnlichen Mechanik identisch, dagegen können wir in unserem Fall zwei im allgemeinen von einander verschiedene Ausdrücke einführen, von welchem jeder einer jener beiden Formen entspricht und welche wir daher als Aktion definieren können. So wird:

$$2T = (T+U) + (T-U)$$

eine Analogie in $H+E$ finden, während der Darstellung

$$\sum_i m_i v_i^2 = \sum_i \left\{ x_i' \frac{\partial T}{\partial x_i'} + y_i' \frac{\partial T}{\partial y_i'} + z_i' \frac{\partial T}{\partial z_i'} \right\}$$

der Ausdruck, welchen wir mit Σ bezeichnet haben, entsprechen wird. Wir wollen daher die beiden von Rethy[1]) für $\nu = 1$ eingeführten Integrale behandeln, nämlich:

(30) $$A_1 \equiv \int_{t_0}^{t_1}(H+E)dt \quad \text{und} \quad A_2 \equiv \int_{t_0}^{t_1}\Sigma\,dt \overset{2)}{=} \int_{t_0}^{t_1}(G+E+H)dt$$

und gehen zunächst von A_2 in seiner Form

$$A_2 \equiv \int_{t_0}^{t_1}\Sigma\,dt$$

aus. Wir setzen die Gültigkeit des Prinzips der lebendigen Kraft voraus, was die Beschränkung mit sich bringt, dafs das kinetische Potential die Zeit explicite nicht enthalte, also

(31) $$\frac{\partial H}{\partial t} = 0.$$

1) l. c. p. 521 (dort mit J und A bezeichnet).
2) Vergl. (28).

Ferner bedingt diese Annahme die Unabhängigkeit der Bedingungsgleichungen von der Zeit, was wohl eine Beschränkung des Problems bedeutet, aber für uns formal nicht in Betracht kommt, da wir mit freien Koordinaten operieren.

Das Prinzip der lebendigen Kraft für allgemeine kinetische Potentiale lautet[1])

(32) $$H - \Sigma = E,$$

und darin genügt E der Gleichung:

(33) $$E = h - \int\sum_s P_s p_s'\,dt,$$

wenn h eine Konstante und P_s die in Richtung der Koordinate p_s wirkende äufsere Kraft ist. Aus (32) folgt:

$$\delta\int_{t_0}^{t_1} H\,dt = \delta\int_{u_0}^{u_1}(Hi)\,du = \delta\int_{u_0}^{u_1}(Ei)\,du + \delta\int_{u_0}^{u_1}\left(i\,\Sigma\right)du,$$

worin die Koordinaten und die Zeit zu variieren sind. Wir wollen aber auch da, um bei der üblichen Darstellungsweise zu bleiben und nach der Rückkehr zu t als unabhängiger Variablen diese von der Variation ausschliefsen zu können, die Zeitvariation absondern und also schreiben:

$$\delta\int_{t_0}^{t_1} H dt = \int_{u_0}^{u_1}\Sigma\,\delta i\,du + \int_{u_0}^{u_1} E\cdot\delta i\cdot du + \int_{u_0}^{u_1} i\cdot du\cdot\delta\Sigma + \int_{u_0}^{u_1} i\,du\cdot\delta E$$
$$+\int_{u_0}^{u_1} i\,du\left\{\frac{\partial E}{\partial t}\delta t + \frac{\partial E}{\partial i}\delta i + \cdots + \frac{\partial E}{\partial \overset{\nu}{i}}\delta \overset{\nu}{i}\right\}$$
$$+\int_{u_0}^{u_1} i\,du\left\{\frac{\partial \Sigma}{\partial t}\delta t + \frac{\partial \Sigma}{\partial i}\delta i + \cdots + \frac{\partial \Sigma}{\partial \overset{\nu}{i}}\delta \overset{\nu}{i}\right\},$$

wenn δE und $\delta\Sigma$ sich blofs auf die Koordinaten und ihre Ableitungen, nicht aber auf die Zeit erstrecken. Wegen (31) und (32) geht diese Gleichung in der bereits auseinandergesetzten Weise über in:

1) Königsberger l. c. p. 910.

$$\delta\int_{t_0}^{t_1} H\,dt = \Big\{\delta t\big(E+\Sigma\big)\Big\}_{t_0}^{t_1} - \int_{u_0}^{u_1}\frac{dH}{du}\,\delta t\,du + \delta\int_{t_0}^{t_1}\Sigma\,dt$$

$$+\delta\int_{t_0}^{t_1} E\,dt + \int_{u_0}^{u_1} du\left\{\delta t\left(\dot t\,\frac{\partial H}{\partial \dot t}\right)+\cdots+\delta\overset{\nu}{t}\left(\overset{\nu}{t}\,\frac{\partial H}{\partial \overset{\nu}{t}}\right)\right\}$$

$$(34)\qquad = \Big\{H\delta t\Big\}_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1}\delta\Sigma\,dt + \int_{t_0}^{t_1}\delta E\,dt$$

$$+\left\{\delta t\left[\dot t\,\frac{\partial H}{\partial \dot t} - \frac{d}{du}\left(\dot t\,\frac{\partial H}{\partial \ddot t}\right)+\cdots+(-1)^{\nu-1}\frac{d^{\nu-1}}{dt^{\nu-1}}\left(t\frac{\partial H}{\partial \overset{\nu}{t}}\right)\right]\right\}_{u_0}^{u_1}$$

$$-\int_{u_0}^{u_1} du\cdot\delta t\cdot\left\{\frac{dH}{du}+\frac{d}{du}\left(\dot t\,\frac{\partial H}{\partial \dot t}\right)-\frac{d^2}{du^2}\left(\dot t\,\frac{\partial H}{\partial \ddot t}\right)+\cdots\right.$$

$$\left.+(-1)^{\nu-1}\frac{d^\nu}{du^\nu}\left(\dot t\,\frac{\partial H}{\partial \overset{\nu}{t}}\right)\right\}.$$

Nun ist analog, wie wir es bei der Ableitung der Grundvariation am Spezialfall $\nu = 3$ ausgeführt haben:

$$\frac{\partial H}{\partial \overset{\varkappa}{t}} = \sum_1^n{}_s\left\{\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\varkappa)}}\frac{\partial p_s^{(\varkappa)}}{\partial \overset{\varkappa}{t}} + \frac{\partial H}{\partial p_s^{(\varkappa+1)}}\frac{\partial p_s^{(\varkappa+1)}}{\partial \overset{\varkappa}{t}}+\cdots+\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}}\frac{\partial p_s^{(\nu)}}{\partial \overset{\varkappa}{t}}\right\}.$$

Ordnet man den Grenzposten von (34) nach den $\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}}$, so findet man

$$\dot t\,\frac{\partial H}{\partial p_s'}\frac{\partial p_s'}{\partial \dot t}+\left[\dot t\,\frac{\partial H}{\partial p_s''}\frac{\partial p_s''}{\partial \dot t}-\frac{d}{du}\left(\dot t\,\frac{\partial H}{\partial p_s''}\frac{\partial p_s''}{\partial \ddot t}\right)\right]$$

$$+\left[\dot t\,\frac{\partial H}{\partial p_s'''}\frac{\partial p_s'''}{\partial \dot t}-\frac{d}{du}\left(\dot t\,\frac{\partial H}{\partial p_s'''}\frac{\partial p_s'''}{\partial \ddot t}\right)+\frac{d^2}{du^2}\left(\dot t\,\frac{\partial H}{\partial p_s'''}\frac{\partial p_s'''}{\partial \dot t}\right)\right]$$

$$+\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .$$

$$+\left[\dot t\,\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}}\frac{\partial p_s^{(\nu)}}{\partial \dot t}-\frac{d}{du}\left(\dot t\,\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}}\frac{\partial p_s^{(\nu)}}{\partial \ddot t}\right)+\cdots+(-1)^{\nu-1}\frac{d^{\nu-1}}{du^{\nu-1}}\left(\dot t\,\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}}\frac{\partial p_s^{(\nu)}}{\partial \overset{\nu}{t}}\right)\right]$$

oder mit Rücksicht auf (3):

$$-p_s'\frac{\partial H}{\partial p_s'}-\left[p_s''\frac{\partial H}{\partial p_s''}-p_s'\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial p_s''}\right)\right]-\left[p_s'''\frac{\partial H}{\partial p_s'''}-p_s''\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial p_s'''}\right)+p_s'\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial H}{\partial p_s'''}\right)\right]$$

$$-\cdots-\left[p_s^{(\nu)}\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}}-p_s^{(\nu-1)}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}}\right)+\cdots+(-1)^{\nu-1}p_s'\frac{d^{\nu-1}}{dt^{\nu-1}}\left(\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}}\right)\right],$$

was wir durch unser Symbol als

$$-\Sigma$$

bezeichnen können. Dementsprechend und mit Rücksicht auf (32) lautet das letzte Integral in (34):

$$\int_{u_0}^{u_1} du\cdot\delta t\cdot\left\{\frac{dH}{du}-\frac{d\Sigma}{du}\right\} = \int_{t_0}^{t_1} dt\cdot\delta t\cdot\left\{\frac{dH}{dt}-\frac{d\Sigma}{dt}\right\} = \int_{t_0}^{t_1}\frac{dE}{dt}\,\delta t\,dt,$$

und die ganze Gleichung (34) nimmt folgende Form an:

$$\delta\int_{t_0}^{t_1} H\,dt = \Big\{H\delta t\Big\}_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1}\delta E\,dt + \int_{t_0}^{t_1}\delta\Sigma\,dt - \Big\{\Sigma\,\delta t\Big\}_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1}\frac{dE}{dt}\,\delta t\,dt$$

$$= \Big\{\big(H-\Sigma\big)\delta t\Big\}_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1}\delta E\,dt + \int_{t_0}^{t_1}\delta\Sigma\,dt - \int_{t_0}^{t_1}\frac{dE}{dt}\,\delta t\,dt,$$

worin die Variationen unter den Integralen sich nicht auf die Variation der Zeit erstrecken. Diese Gleichung stellen wir mit (23) zusammen, d. h. wir setzen ihre rechten Seiten einander gleich. Wir erhalten dann infolge von (31):

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}\Sigma\,dt = \int_{t_0}^{t_1} dt\left[\delta E\left(\frac{\partial H}{\partial E}-1\right)+\frac{\partial H}{\partial E}\frac{dE}{dt}\,\delta t\right]+\int_{t_0}^{t_1}\sum_1^n{}_s L_s\,\delta p_s\,dt$$

$$+\sum_1^n{}_s\left\{H_1\,\delta p_s+{}'H_2\,\delta p_s'+\cdots+H_\nu\,\delta p_s^{(\nu-1)}\right\}_{t_0}^{t_1}.$$

Ist nun die Bewegung eine Lagrangesche, d. h. ist

$$L_s + P_s = 0,$$

so geht aus der letzten Gleichung folgende Form des Aktionsprinzips hervor:

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}\Sigma\,dt = -\int_{t_0}^{t_1}\sum_1^n{}_s P_s\delta p_s\,dt + \int_{t_0}^{t_1} dt\left\{\delta E\left(\frac{\partial H}{\partial E}-1\right)+\frac{\partial H}{\partial E}\frac{dE}{dt}\,\delta t\right\}$$

$$(35)\qquad +\sum_1^n{}_s\left\{H_1\,\delta p_s + H_2\,\delta p_s' + \cdots + H_\nu\,\delta p_s^{(\nu-1)}\right\}_{t_0}^{t_1}.$$

Dieser Ausdruck stimmt mit dem von Königsberger[1]) für $\nu = 2$

1) l. c. p. 923. Was den dort vorkommenden Grenzposten mit δt betrifft, vergl. den Abdruck derselben Arbeit im Journal für Mathematik Bd. 118, Anmerkung zu p. 304.

gefundenen überein bis auf die Posten, welche sich auf die dort nicht besonders hervorgehobene Abhängigkeit des kinetischen Potentials von der Energie beziehen.

Man sieht, dafs bei Voraussetzung fester Grenzen in Bezug auf p_s, p_s', $\cdots$, $p_s^{(\nu-1)}$ für das Verschwinden der Variation notwendig und hinreichend ist, dafs

$$\text{neben} \quad L_s + P_s = 0 \quad \text{noch} \quad P_s = 0 \quad \text{sei, d. h.}$$

$$L_s = 0 . \tag{c}$$

In diesem Falle folgt nämlich aus (33)

$$E = h = \text{const.}$$

Infolgedessen verschwindet die ganze linke Seite von (35), und es ergiebt sich das Aktionsprinzip als

$$\delta A_2 = 0 .$$

§ 8.

Fortsetzung.

Wir können die Aufgabe des letzten Kapitels noch in einer andern Weise behandeln. Aus (28), (32) und (33) folgt nämlich als Ausdruck des Prinzips der lebendigen Kraft:

$$G = -2E = -2h + 2\int \sum_1^n P_s p_s' \, dt .$$

Wir wollen im folgenden stets voraussetzen, dafs keine äufseren Kräfte existieren, d. h. dafs sämtliche P_s Null sind, so dafs infolge (33) und der eben angegebenen Beziehung

$$E = h = \text{const.} \tag{36}$$

und

$$G = -2h$$

ist. In unserem kinetischen Potential H kann natürlich eine additive Konstante enthalten sein, und diese können wir so bestimmen, dafs die Funktion, welche wir mit dem Symbol G bezeichnen, um $2h$ zunimmt und die vorstehende Gleichung in

$$G = 0 \tag{37}$$

übergeht. Dieses können wir als Ausdruck des Prinzips der lebendigen Kraft definieren, um dann die im vorigen Kapitel behandelte Frage nach dem Aktionsprinzipe im Falle der lebendigen Kraft folgendermafsen zu formulieren: Es sollen die Bedingungen für das Verschwinden der Variation

$$\delta A_2 \equiv \delta \int_{t_0}^{t_1} \Sigma \, dt$$

angegeben werden, wenn (37) als Bedingungsgleichung aufgefafst wird. Zur Lösung dieser Aufgabe verfahren wir in der bei isoperimetrischen Problemen üblichen Weise, indem wir einen unbestimmten Lagrangeschen Multiplikator $\lambda - 1$ einführen und die Bedingungen für das Verschwinden von

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \Omega \, dt \tag{38}$$

suchen, wenn Ω folgendermafsen definiert ist:

$$\Omega \equiv \Sigma + (\lambda - 1) \cdot G . \tag{39}$$

Den Ausdruck (38) brauchen wir nicht zu entwickeln, denn Ω ist irgend eine bestimmte Funktion der Zeit, der Energie, der Koordinaten und ihrer Ableitungen, also eine Funktion von genau demselben Charakter, wie unser Potential H. Wir können daher die Gleichung (23) ohne weiteres verwerten, wenn wir nur darin H durch Ω ersetzen, also:

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_0}^{t_1} \Omega \, dt = \int_{t_0}^{t_1} dt \Big\{ & L_s(\Omega)\delta p_s + \frac{\partial \Omega}{\partial E}\delta E + \Big[\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{\partial \Omega}{\partial E}\frac{dE}{dt} + \frac{d}{dt}\Big(\Sigma(\Omega) - \Omega\Big)\Big]\delta t \Big\} \\ & + \Big\{ \delta t \Big[\Omega - \Sigma(\Omega)\Big] \Big\}_{t_1} . \end{aligned} \tag{40}$$

Dabei haben wir die Integrationsgrenzen als fest in Bezug auf δp_s, $\delta p_s'$, $\cdots$, $\delta p_s^{(\nu-1)}$ und die untere Grenze auch in Bezug auf δt angenommen. Die Symbole $L_s(\Omega)$ und $\Sigma(\Omega)$ bedeuten die Operationen (25) und (26) für das Argument Ω statt des dortigen H.

Wegen der Gültigkeit der Gleichung (36) ist die Gesamtvariation der Energie Null, und, da auch $\frac{dE}{dt}$ verschwindet, ist auch $\delta E = 0$. Für das Verschwinden der Variation (40) bei beliebigen δp_s und δt ergeben sich dann folgende notwendigen und hinreichenden Bedingungen:

$$L_s(\Omega) = 0 \quad \text{für } s = 1, 2, \cdots, n \tag{41a}$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{\partial \Omega}{\partial E}\frac{dE}{dt} + \frac{d}{dt}\Big(\Sigma(\Omega) - \Omega\Big) = 0 \tag{41b}$$

$$\Big(\Sigma(\Omega) - \Omega\Big)_{t_1} = 0 \tag{41c}$$

neben der von vorn herein gegebenen Gleichung

$$G = 0. \tag{37}$$

Dieses sind die Gleichungen, zu denen Réthy[1]) für den Fall $\nu = 1$ gelangt ist. Dort ist auch gezeigt, dafs in diesem Falle die Gleichungen (41) nicht unabhängig von einander sind, indem (41^b) aus (41^a) folgt. Es bleiben daher für die ganze Bewegung blofs $n + 1$ Gleichungen (41^a) und (37) zur Bestimmung der $n + 2$ Unbekannten

$$\lambda,\ E,\ p_1,\ \cdots,\ p_n,$$

da (41^c) nur für den Zeitpunkt t_1 zu befriedigen ist. Infolgedessen kann man noch eine willkürliche Festsetzung treffen, wenn das Problem völlig bestimmt sein soll, und Réthy diskutiert auch eine Reihe von solchen Festsetzungen, welche wir jedoch hier nicht näher auseinandersetzen wollen, da wir sonst seine Schlüsse Wort für Wort wiederholen müfsten, ohne sie auf unsern allgemeinen Fall übertragen zu können. Ich will nur hervorheben, dafs dort aus der Gleichung (41^c) für den Zeitpunkt t_1 und bei einer der dort getroffenen Festsetzungen auch für die ganze Dauer der Bewegung

$$\lambda = 0$$

bestimmt wird[2]), woraus

$$\Omega = H + E$$

folgt, so dafs (41^a) in die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen übergeht. Es war nämlich dabei vorausgesetzt, dafs E eine reine Zeitfunktion oder, richtiger gesagt, von den Ableitungen der Koordinaten unabhängig sei, denn dann ist

$$L_s(\Omega) = L_s.$$

Für den allgemeinen Fall $\nu > 1$ können wir die Identität der Gleichungen (41^a) mit den Lagrangeschen nur dann nachweisen, wenn λ sich als konstant ergiebt, denn dann mufs es, wie wir finden werden, Null sein. Für diesen Fall werden wir aber auch finden, dafs unsere Gleichungen (41) nicht von einander unabhängig sind

1) l. c. p. 531.

2) wenigstens insofern die bei Untersuchungen über die Variationsprinzipien stets gemachte Voraussetzung

$$\sum_1^n \sum_s \sum_\sigma \frac{\partial^2 H}{\partial p_s' \partial p_\sigma'}\, p_s' p_\sigma' \neq 0 \tag{42}$$

aufrecht erhalten wird.

und dafs sie zusammen mit (37) nicht ausreichen, um die Unbekannten zu bestimmen

Schreiben wir nämlich

$$\Omega \equiv \Sigma + (\lambda - 1)G = \lambda\,\Sigma - (\lambda - 1)E - (\lambda - 1)H.$$

und beachten, dafs wegen der vorausgesetzten Gültigkeit des Princips der lebendigen Kraft das kinetische Potential und also auch das daraus durch Differentiationsoperationen entstehende Σ die Zeit explicite nicht enthalten und dafs ferner E constant ist, so folgt

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \Omega}{\partial E}\,\frac{dE}{dt} = 0.$$

Wir haben daher jedenfalls die Möglichkeit, die Gleichungen (41^b) und (41^c) in eine einzige

$$\Sigma(\Omega) - \Omega = 0 \tag{43}$$

für die ganze Dauer der Bewegung zusammenzufassen. Wir werden jedoch nachweisen, dafs dieses nicht nur möglich ist, sondern den Thatsachen entspricht, wenn λ konstant ist, wenn wir bei der von Réthy gemachten Annahme bleiben, dafs E von den Ableitungen der Koordinaten unabhängig ist und wenn wir noch eine später unter (49) anzugebende Bedingung, welche (42) entspricht, als gültig voraussetzen.

Wegen der beiden ersten Annahmen ist nämlich zunächst

$$\Sigma(\lambda G) = \lambda \Sigma(G) \quad \text{und} \quad \Sigma(E) = 0. \tag{44}$$

Gehen wir nun von

$$\Omega \equiv \Sigma - G + \lambda G = H + E + \lambda G$$

aus und bilden

$$\begin{aligned}\Sigma(\Omega) - \Omega &= \Sigma + \Sigma(E) + \Sigma(\lambda G) - H - E - \lambda G \\ &= \Sigma(E) + \Sigma(\lambda G) - (\lambda - 1)G,\end{aligned}$$

so finden wir mittels (37) und (44):

$$\Sigma(\Omega) - \Omega = \lambda\,\Sigma(G). \tag{45}$$

Darin müssen wir $\Sigma(G)$ durch H ausdrücken.

$$\Sigma(G) = \Sigma(\Sigma) - \Sigma - \Sigma(E) = \Sigma(\Sigma) - \Sigma. \tag{46}$$

Analog (25) ist:

$$\Sigma(\Sigma) = \sum_1^n{}_\sigma \left\{ p_\sigma'\,\Sigma_1 + p_\sigma''\,\Sigma_2 + \cdots + p_\sigma^{(\nu)}\,\Sigma_\nu \right\}, \tag{47}$$

worin:

$$\Sigma_\varkappa = \frac{\partial \Sigma}{\partial p_\sigma^{(\varkappa)}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \Sigma}{\partial p_\sigma^{(\varkappa+1)}}\right) + \cdots + (-1)^{\nu-\varkappa}\frac{d^{\nu-\varkappa}}{dt^{\nu-\varkappa}}\left(\frac{\partial \Sigma}{\partial p_\sigma^{(\nu)}}\right).$$

Entwickelt man die rechte Seite dieses Ausdrucks, so findet man:

$$\begin{aligned}\Sigma_\varkappa = \sum_1^n{}_s\Big[&\Big\{p_s'\frac{\partial H_1}{\partial p_\sigma^{(\varkappa)}} + p_s''\frac{\partial H_2}{\partial p_\sigma^{(\varkappa)}} + \cdots + p_s^{(\nu)}\frac{\partial H_\nu}{\partial p_\sigma^{(\varkappa)}}\Big\}\\ &- \frac{d}{dt}\Big\{p_s'\frac{\partial H_1}{\partial p_\sigma^{(\varkappa+1)}} + p_s''\frac{\partial H_2}{\partial p_\sigma^{(\varkappa+1)}} + \cdots + p_s^{(\nu)}\frac{\partial H_\nu}{\partial p_\sigma^{(\varkappa+1)}}\Big\}\\ &+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &+ (-1)^{\nu-\varkappa}\frac{d^{\nu-\varkappa}}{dt^{\nu-\varkappa}}\Big\{p_s'\frac{\partial H_1}{\partial p_\sigma^{(\nu)}} + \cdots + p_s^{(\nu)}\frac{\partial H_\nu}{\partial p_\sigma^{(\nu)}}\Big\}\Big]\\ &+ \Big[H_\varkappa - \frac{dH_{\varkappa+1}}{dt} + \cdots + (-1)^{\nu-\varkappa}\frac{d^{\nu-\varkappa}H_\nu}{dt^{\nu-\varkappa}}\Big].\end{aligned}$$

Dieses in (47) eingesetzt folgt:

$$\begin{aligned}\Sigma(\Sigma) = &\overline{\sum_1^n{}_s\sum_\sigma}\Big\{p_\sigma' P_1 + p_\sigma'' P_2 + \cdots + p_\sigma^{(\nu)} P_\nu\Big\}\\ &+ \sum_1^n{}_s\Big\{p_s'\Big[H_1 - \frac{dH_2}{dt} + \cdots + (-1)^{\nu-1}\frac{d^{\nu-1}H_\nu}{dt^{\nu-1}}\Big]\\ &+ p_s''\Big[H_2 - \frac{dH_3}{dt} + \cdots + (-1)^{\nu-2}\frac{d^{\nu-2}H_\nu}{dt^{\nu-2}}\Big]\\ &+ \cdots\cdots\cdots + p_s^{(\nu)}H_\nu\Big\},\end{aligned} \tag{48}$$

wenn

$$\begin{aligned}P_\varkappa \equiv &\Big[p_s'\frac{\partial H_1}{\partial p_\sigma^{(\varkappa)}} + p_s''\frac{\partial H_2}{\partial p_\sigma^{(\varkappa)}} + \cdots + p_s^{(\nu)}\frac{\partial H_\nu}{\partial p_\sigma^{(\varkappa)}}\Big]\\ &- \frac{d}{dt}\Big[p_s'\frac{\partial H_1}{\partial p_\sigma^{(\varkappa+1)}} + p_s''\frac{\partial H_2}{\partial p_\sigma^{(\varkappa+1)}} + \cdots + p_\sigma^{(\nu)}\frac{\partial H_\nu}{\partial p_\sigma^{(\varkappa+1)}}\Big]\\ &+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &+ (-1)^{\nu-\varkappa}\frac{d^{\nu-\varkappa}}{dt^{\nu-\varkappa}}\Big[p_s'\frac{\partial H_1}{\partial p_\sigma^{(\nu)}} + p_s''\frac{\partial H_2}{\partial p_\sigma^{(\nu)}} + \cdots + p_\sigma^{(\nu)}\frac{\partial H_\nu}{\partial p_\sigma^{(\nu)}}\Big].\end{aligned}$$

Wegen (25) und (48) liefert nun (46):

$$\begin{aligned}\Sigma(G) = &\overline{\sum_1^n{}_s\sum_\sigma}\Big\{p_\sigma' P_1 + p_\sigma'' P_2 + \cdots + p_\sigma^{(\nu)} P_\nu\Big\}\\ &- \sum_1^n{}_s\Big\{p_s'\Big[\frac{dH_2}{dt} - \frac{d^2H_3}{dt^2} + \cdots + (-1)^\nu\frac{d^{\nu-1}H_\nu}{dt^{\nu-1}}\Big]\\ &+ p_s''\Big[\frac{dH_3}{dt} - \frac{d^2H_4}{dt^2} + \cdots + (-1)^{\nu-1}\frac{d^{\nu-2}H_\nu}{dt^{\nu-2}}\Big]\\ &+ \cdots\cdots\cdots + p_s^{(\nu-1)}\frac{dH_\nu}{dt}\Big\}\\ = &\overline{\sum_1^n{}_s\sum_\sigma}\Big\{p_\sigma' P_1 + p_\sigma'' P_2 + \cdots + p_\sigma^{(\nu)} P_\nu\Big\}\\ &- \sum_1^n{}_s\Big\{p_s'\Big[\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial H}{\partial p_s''}\Big) - 2\frac{d^2}{dt^2}\Big(\frac{\partial H}{\partial p_s''}\Big) + \cdots + (-1)^\nu(\nu-1)\frac{d^{\nu-1}}{dt^{\nu-1}}\Big(\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}}\Big)\Big]\\ &+ p_s''\Big[\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial H}{\partial p_s'''}\Big) - 2\frac{d^2}{dt^2}\Big(\frac{\partial H}{dp_s^{(4)}}\Big) + \cdots + (-1)^{\nu-1}(\nu-2)\frac{d^{\nu-2}}{dt^{\nu-2}}\Big(\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}}\Big)\Big]\\ &+ \cdots\cdots\cdots\cdots + p^{(\nu-1)}\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial H}{\partial p_s^{(\nu)}}\Big)\Big\}\\ = &\overline{\sum_1^n{}_s\sum_\sigma}\Big\{p_\sigma' P_1 + p_\sigma'' P_2 + \cdots + p_\sigma^{(\nu)} P_\nu\Big\}\\ &- \sum_1^n{}_s\Big\{p_s' Q_2 + p_s'' Q_3 + \cdots p_s^{(\nu-1)} Q_\nu\Big\} \equiv P - Q,\end{aligned}$$

worin P die Doppelsumme, Q die einfache Summe darstellen soll. Die Bedeutung der Symbole $Q_\varkappa$ ist unmittelbar ersichtlich.

Wir machen nun die bereits erwähnte Voraussetzung, dafs stets

$$P \neq Q \tag{49}$$

sei, wodurch, was wohl zu beachten ist, der Fall, dafs beide gleichzeitig verschwinden, ausgeschlossen wird. Dann folgt aus der letzten Gleichung

$$\Sigma(G) \neq 0$$

und aus (41°) und (45) für $t = t_1$:

$$\lambda = 0.$$

Da nun λ konstant sein sollte, besteht nach (45) für die ganze Bewegung die Gleichung (43), so dafs (43) in der That (41ᵇ) und (41ᶜ) ersetzt.

Verschwindet aber λ, so geht (41ᵃ) in die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen über, wie wir bereits auseinandergesetzt haben, und wir haben genau die Resultate des vorigen Kapitels, denn (43) lautet dann:

$$\Sigma - (\Sigma - G) = G = 0.$$

Diese sind als Spezialfälle der Gleichungen (41ᵃ), (41ᵇ) und (41ᶜ) zu betrachten, bei welchen letzteren wir stehen bleiben müssen, wenn λ nicht konstant und $\nu > 1$ ist.

§ 9.
Das Aktionsprinzip ohne lebendige Kraft.

Wir gehen diesmal von A_1[1]) aus und fragen nach den Bedingungen für das Verschwinden von

$$\delta A_1 = \delta \int_{t_0}^{t_1} (H + E)dt = \delta \int_{t_0}^{t_1} H dt + \delta \int_{t_0}^{t_1} E dt.$$

Das erste Integral haben wir in (29) dargestellt; dass zweite mufs in derselben Weise, wie jenes entwickelt werden:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} E dt = \delta \int_{u_0}^{u_1} (E\dot{t})du = \Big[E\delta t\Big]_{u_0}^{u_1} - \int_{u_0}^{u_1} \frac{dE}{dt}\,\delta t du + \int_{u_0}^{u_1} \delta E \cdot \dot{t} du,$$

oder, wenn wir von δE den noch darin enthaltenen Posten $\frac{dE}{dt}\delta t$ absondern:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} E dt = \Big[E\delta t\Big]_{u_0}^{u_1} + \int_{u_0}^{u_1} \delta E \cdot \dot{t} du = \Big[E\delta t\Big]_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \delta E \cdot dt,$$

und darin enthält δE nichts mehr von δt. Dieses zu (29) addiert, giebt:

$$\delta A_1 = \int_{t_0}^{t_1} dt \left\{ \left(\frac{\partial H}{\partial E} + 1\right)\delta E - \sum_1^n L_s p_s' dt \right\} + \int_{t_0}^{t_1} L_s \delta p_s dt$$

(50)
$$- \Big[G\delta t\Big]_{t_0}^{t_1} + \sum_1^n \left\{ H_1 \delta p_s + H_2 \delta p_s' + \cdots + H_\nu \delta p_s^{(\nu-1)} \right\}_{t_0}^{t_1}.$$

1) Vergl. (30).

Nehmen wir feste Grenzen in Bezug auf t, p_s, p_s', $\cdots$, $p_s^{(\nu-1)}$ an, so folgen als hinreichende Bedingungen für das Verschwinden von δA_1:

(d)
$$L_s = 0 \quad \text{und} \quad 1 + \frac{\partial H}{\partial E} = 0.$$

Von diesen beiden ist aber blofs die erste zugleich eine notwendige Bedingung, denn die Variation kann auch bei einer Bewegung, welche der zweiten nicht genügt, verschwinden, und zwar wenn die Energie für unvariierbar erklärt wird, oder aber wenn die Energie eine reine Zeitfunktion ist. Die Bedingungen lauten also:

(e)
$$L_s = 0 \quad \text{neben} \quad \delta E = 0.$$

Die Gleichungen (d) und (e) sind auch von Réthy[1]) angegeben worden.

Aber auch die zweite Form der Aktion läfst ein Verschwinden der Variation ohne Zuhülfenahme des Prinzips der lebendigen Kraft zu:

$$\delta A_2 = \delta \int_{t_0}^{t_1} (G + H + E)dt = \delta A_1 + \delta \int_{u_0}^{u_1} (G\dot{t})du$$

$$= \delta A_1 + \int_{t_0}^{t_1} dt \Big[\delta G + \frac{dG}{dt}\delta t\Big] - \int_{t_0}^{t_1} \frac{dG}{dt}\delta t\, dt + \Big[G\delta t\Big]_{t_0}^{t_1}$$

oder, wenn wir analog wie bisher von δG den Posten $\frac{dG}{dt}\delta t$ absondern:

$$\delta A_2 = \delta A_1 + \int_{t_0}^{t_1} \delta G dt + \Big[G\delta t\Big]_{t_0}^{t_1}.$$

Nach (50) ist das

$$\delta A_2 = \int_{t_0}^{t_1} dt \left\{ \delta G + \left(1 + \frac{\partial H}{\partial E}\right)\delta E - \sum_1^n L_s p_s' \delta t \right\}$$

(51)
$$+ \int_{t_0}^{t_1} \sum_1^n L_s \delta p_s.$$

Die Variation verschwindet, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

(f)
$$\begin{cases} L_s = 0 \quad \text{während } E \text{ eine reine Zeitfunktion und} \\ \qquad \int_{t_0}^{t_1} \delta G dt = 0 \end{cases}$$

1) l. c. p. 528.

ist, worin auch der Fall enthalten ist, dafs G eine reine Zeitfunktion ist, indem dann stets

$$\delta G = 0$$

ist.

(g) $L_s = 0$ während $1 + \frac{\partial H}{\partial E} = 0$ und $\int_{t_0}^{t_1} \delta G\, dt = 0,$

(h) $L_s = 0,$ $\int_{t_0}^{t_1} \delta G\, dt = 0$ und E unvariierbar.

Diese Gleichungen stimmen wiederum mit den von Réthy[1]) für $\nu = 1$ gefundenen überein.

§ 10.

Anwendung der gefundenen Bedingungen.

Behandelt man ein mechanisches Problem, indem man von einer der besprochenen Formen der Variationsprinzipien ausgeht, so erhält man eine der Bedingungen (a) bis (h) oder die Gleichungen (41ª) bis (41ᶜ). Den Forderungen (a) bis (h) ist die eine gemein:

$$L_s = 0.$$

In einigen treten noch andere Bedingungen hinzu, und zwar $\frac{\partial H}{\partial E} = 0$, $G = 0$, $\frac{\partial H}{\partial E} = -1$, $\delta E = 0$ $\int_{t_0}^{t_1} \delta G\, dt = 0$, $\frac{dE}{dt} = 0$ oder auch einige von diesen gleichzeitig.

Es handelt sich nun darum, die Bewegung des Systems zu verfolgen. Die gemeinsame Forderung $L_s = 0$ für $s = 1, 2, \cdots, n$ liefert n Gleichungen, welche, wie man sich leicht überzeugt, in den $p_s^{(2\nu)}$ linear sind. Man kann hieraus die höchsten Ableitungen durch die niederen ausdrücken, die Differentialgleichungen integrieren und die dabei hineinkommenden $2n\nu$ Integrationsconstanten durch die als gegeben vorauszusetzenden Anfangs- und Endwerte der Koordinaten und ihrer $\nu - 1$ ersten Ableitungen bestimmen. Damit sich jedoch aus jenen n Gleichungen bestimmte Werte für die $p_s^{(2\nu)}$ ergeben, wird im allgemeinen, d. h. wenn nicht gerade der Fall vorliegt, dafs die L_s homogen in den $p_s^{(2\nu)}$ sind, die Annahme notwendig sein, dafs die Determinante der Koeffizienten nicht verschwindet:

1) l. c. p. 529 u. 530.

$$(52) \qquad D \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial p_1^{(\nu)} \partial p_1^{(\nu)}}, & \frac{\partial^2 H}{\partial p_1^{(\nu)} \partial p_2^{(\nu)}}, & \cdots, & \frac{\partial^2 H}{\partial p_1^{(\nu)} \partial p_n^{(\nu)}} \\ \frac{\partial^2 H}{\partial p_2^{(\nu)} \partial p_1^{(\nu)}}, & \frac{\partial^2 H}{\partial p_2^{(\nu)} \partial p_2^{(\nu)}}, & \cdots, & \frac{\partial^2 H}{\partial p_2^{(\nu)} \partial p_n^{(\nu)}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 H}{\partial p_n^{(\nu)} \partial p_1^{(\nu)}}, & \frac{\partial^2 H}{\partial p_n^{(\nu)} \partial p_2^{(\nu)}}, & \cdots, & \frac{\partial^2 H}{\partial p_n^{(\nu)} \partial p_n^{(\nu)}} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Unter dieser Annahme ist das Problem definiert bis auf seine Energie, welche auch in der That unbestimmt bleibt, so lange nicht noch eine Festsetzung getroffen wird. Es ist auch unmittelbar ersichtlich, dafs die hinzutretenden Gleichungen

$$\frac{\partial H}{\partial E} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial E} = -1, \quad \delta E = 0$$

u. s. w. diese Festsetzung nicht ersetzen können, da sie nichts über den Wert der Energie, sondern blofs zum Teil ihr Vorkommen in H, zum Teil ihre Beschaffenheit als eine Zeitfunktion oder Konstante angeben. Definiert ist das Problem nur durch die Gleichung $G = 0$, d. h. im Falle der lebendigen Kraft, oder durch

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta G\, dt = 0,$$

welche Gleichungen wirkliche Bestimmungen von E zulassen. Beim Falle der lebendigen Kraft ist jedoch zu beachten, dafs, nachdem man E aus $G = 0$ als Zeitfunktion ermittelt und etwa mittels der gegebenen Anfangswerte ihren konstanten Wert gefunden hat, dieser gefundene Wert dann zur Ermittelung eines der Endwerte dienen kann, d. h. es dürfen blofs $2n\nu - 1$ der genannten Anfangs- und Endwerte gegeben sein.

Im allgemeinen Falle (41ª) bis (41ᶜ), bei welchem auch (37) erfüllt sein mufs, hat man $n + 3$ Gleichungen für die $n + 2$ Unbekannten

$$\lambda,\ E,\ p_1^{(2\nu)},\ \cdots,\ p_n^{(2\nu)},$$

d. h. das Problem wird im allgemeinen überbestimmt sein, wenn nicht zufällig, wie beim Fall $\lambda = \text{const.}$ oder $\nu = 1$, einige von den Gleichungen zusammenfallen, oder man (41ᵇ) und (41ᶜ) durch (43) ersetzt.

Lebenslauf.

Geboren am 20. Mai 1873 zu Dünaburg in Rufsland als Sohn des jetzt in Wilna wohnenden Kaufmanns Joseph Lewin jüdischer Konfession und russischer Staatsangehörigkeit, genofs ich erst in Rufsland und später in Frankfurt a/M. Privatunterricht, trat im Herbst 1892 in die Osternunterprima der Klingerschule, Oberrealschule zu Frankfurt a/M., und verliefs diese Schule zu Ostern 1894 mit dem Zeugnis der Reife. Seit Herbst 1894 studierte ich Mathematik und Naturwissenschaften an der Universität Heidelberg.

192 H 18 DL
Lewin
Hamilton and Manpertuis
Inter-Library Loan
FEB 1 0 1948
COLUMBIA UNIVERSITY LIBRARIES
1010669914
BRITTLE DO NOT PHOTOCOPY